Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 6

МАТЕМАТИКА

А. А. АБРАМОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСКОРЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 29 VIII 1950)

1°. Пусть система линейных алгебраических уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(или $x = Ax + b$)* решается методом итераций:

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b, \quad x^{(0)} \text{ — начальное приближение.}$$

Будем предполагать, что A имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $Ae_i = \lambda_i e_i$ и $-1 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда, как известно, итерационный процесс сходится, для $z^{(k)} = x - x^{(k)}$ имеем $z^{(k)} = A^k z^{(0)}$, и скорость сходимости характеризуется числом $\lambda_A = \max|\lambda_i|$.

2°. Рассмотрим итерационный процесс:

$$x^{(2k+1)} = Ax^{(2k)} + b, \quad x^{(2k+2)} = 2\left(Ax^{(2k+1)} + b\right) - x^{(2k)},$$

$$x^{(0)} \text{ — начальное приближение.}$$

Последовательности $x^{(0)}, x^{(2)}, x^{(4)}, x^{(6)}, \ldots$ соответствует итерация матрицы $A_1 = 2A^2 - 1$. Собственные векторы этой матрицы те же, что и A, а собственные числа $\underset{(1)}{\lambda_i} = 2\lambda_i^2 - 1$. При $|\lambda_i| \geqslant \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $\quad |\underset{(1)}{\lambda_i}| \leqslant \lambda_i^4$, при $\sqrt{\sqrt{2}-1} > |\lambda_i| \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad |\underset{(1)}{\lambda_i}| \leqslant \lambda_i^2$, при $0 \leqslant |\lambda_i| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad |\underset{(1)}{\lambda_i}| \leqslant 1$.

Поэтому, если предварительно сделано несколько итераций A и компоненты вектора ошибки по e_i, для которых $|\lambda_i| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, уже достаточно малы, то выгоднее (примерно в два раза) применять A_1, нежели A^2. По тем же соображениям, сделав несколько итераций A_1, выгодно перейти к $A_2 = 2A_1^2 - 1, \ldots$ и т. д.

3°. Если $p_n(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 1$, то при $x^{(k+1)} = p_n(A)\,x^{(k)} + \frac{1 - p_n(A)}{1 - A}\,b$ $\quad z^{(k)} = [p_n(A)]^k z^{(0)}$, и если мы бу-

* Для простоты мы рассматриваем конечномерный случай.

дем искать $p_n(A)$ такие, что $|\lambda_{p_n(A)}| \leqslant 1$ и для $|\lambda_i|$, близких к 1, $|\lambda_{i\,p_n(A)}|$ возможно мало, то придем к экстремальной задаче:

Среди полиномов n-й степени $p_n(t)$ таких, что:

1) $|p_n(t)| \leqslant 1$ при $|t| \leqslant 1$;

2) $p_n(1) = 1$,

найти полином $\widetilde{p}_n(t)$, для которого:

$$\left.\begin{aligned} &\text{если } |\widetilde{p}_n(-1)| \neq 1, \quad \text{то} \quad |\widetilde{p}'_n(1)| \\ &\text{если } |\widetilde{p}_n(-1)| = 1, \quad \text{то} \quad \min\left[|\widetilde{p}'_n(1)|,\ |\widetilde{p}'_n(-1)|\right] \end{aligned}\right\} \text{maximum}.$$

Решением ее являются полиномы $\widetilde{p}_n(t) = 2^n T_n(t)$, где $T_n(t)$ — полиномы Чебышева ([1], стр. 28).

4°. Если мы делаем итерации в последовательности: k итераций A, k итераций $A_1, \ldots$, то после k-й итерации A_1 компоненты ошибки по e_i, для которых $|\lambda_i| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, уже уменьшатся не меньше, чем в $\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^k$ раз. Исходя из этих соображений, можно заранее определить число k. Если в процессе начнут сказываться ошибки округления или окажется, что итераций какого-либо типа было сделано недостаточно (это сказывается в том, что итерации делаемого типа не дают ожидаемого эффекта), то нужно сделать 1—2 раза $A, A_1, \ldots$, а затем продолжать процесс.

5°. Указанный способ ускорения был применен к решению системы $Bx + c = 0$ 130 нормальных уравнений, итерации велись по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \xi\left(Bx^{(k)} + c\right),$$

$\xi = \dfrac{2}{\max\limits_i \sum\limits_j |b_{ij}|}$. После применения $A^5 A_1^4 A_2^4 A_3 A^2 A_1$ сумма квадратов невязок $\sum\limits_i \left(\sum\limits_j b_{ij} x_j^{(k)} + c_i\right)^2$ уменьшилась в $\sim 10^6$ раз.

Поступило
29 VIII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.