Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

О ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ОТКРЫТОМ КОНЦЕ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА, ДИАМЕТР КОТОРОГО ЗНАЧИТЕЛЬНО БОЛЬШЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 5 VIII 1950)

Теория излучения электромагнитных волн различных типов из открытого конца круглого волновода была изложена в работах [1,2]. Полученные формулы дают возможность точно рассчитать, в частности, характеристики излучения. В настоящей заметке мы рассмотрим физический смысл выражений для поля излучения при условии, что диаметр трубы велик по сравнению с длиной волны. Соответствующие формулы получаются из строгой теории без труда; для симметричных волн они выписаны в § 6 работы [1].

Поле излучения симметричной электрической волны E_{0l} в заднем полупространстве $0 < \vartheta < \pi/2$ дается для волновой зоны формулой

$$E_\vartheta = H_\varphi = -\frac{2}{ck} A \frac{\sin\frac{\vartheta_l}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \frac{1}{(\cos\vartheta - \cos\vartheta_l) H_0(\varkappa \sin\vartheta)} \frac{e^{ikR+U+U_l}}{R}. \tag{1}$$

Здесь ϑ — угол между осью z (ось волновода, стенка которого расположена при $r = a$, $z > 0$) и радиус-вектором R, проведенным к точке наблюдения из начала координат — центра выходного отверстия волновода. Таким образом, направление $\vartheta = 0$ соответствует излучению назад, $\vartheta = \pi$ — излучению прямо вперед, а плоскость $\vartheta = \pi/2$ отделяет переднее полупространство от заднего. Плотность электрического тока волны, приходящей к открытому концу волновода, предполагается равной $Ae^{-iw_l z}$. Фигурирующий в формуле (1) угол ϑ_l связан с волновым числом $-w_l$ набегающей волны соотношением

$$k \cos\vartheta_l = -w_l. \tag{2}$$

Как известно, всякая волна, распространяющаяся в бесконечном волноводе, может быть представлена в виде суперпозиции пучка плоских волн. Угол ϑ_l, определяемый формулой (2), есть угол между направлением распространения этих плоских волн и осью z. Безразмерный параметр

$$\varkappa = ka = \frac{2\pi a}{\lambda}, \tag{3}$$

пропорциональный отношению диаметра волновода $2a$ к длине волны λ, мы будем считать большим числом:

$$\varkappa \gg 1. \tag{4}$$

Тогда в заднем полупространстве выполняется условие

$$\varkappa \sin \vartheta \gg 1 \tag{5}$$

всюду, за исключением направлений $\vartheta \approx 0$, соответствующих излучению назад вдоль внешней поверхности трубы. При условии (5) функция Ханкеля $H_0 = H_0^{(1)}$ может быть заменена своим асимптотическим выражением

$$H_0(\varkappa \sin \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varkappa \sin \vartheta}}\, e^{i\left(\varkappa \sin\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}, \tag{6}$$

после чего формула (1) принимает вид

$$H_\varphi = -\frac{i}{c}\, 2\sqrt{2\pi}\, A \frac{\sin\frac{\vartheta_l}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_l} \sqrt{\frac{a}{k\sin\vartheta}}\, \frac{e^{i\left[k(R-a\sin\vartheta) + \frac{\pi}{4}\right] + U + U_l}}{R}. \tag{7}$$

Если в этом выражении отвлечься от множителя

$$\sqrt{\frac{a}{R\sin\vartheta}}\, e^{U+U_l}, \tag{8}$$

то оно переходит в формулу для цилиндрической волны, рассеянной краем полуплоскости при падении на нее под углом ϑ_l плоской волны с магнитным полем, имеющим единственную составляющую H_φ вдоль края этой полуплоскости. При этом стоящее в показателе выражение $R - a\sin\vartheta$ есть для волновой зоны просто расстояние от края.

Множитель

$$\sqrt{\frac{a}{R\sin\vartheta}} = \sqrt{\frac{a}{r}} \tag{9}$$

показывает, что при удалении от края волновода эти первичные цилиндрические волны постепенно „развертываются“ и превращаются в сферические.

При условии (4) неравенство (5) может нарушаться для тех значений углов ϑ, для которых

$$\sin\vartheta \ll 1. \tag{10}$$

В заднем полупространстве для таких направлений вдоль стенки трубы зависимость поля излучения от угла ϑ определяется функцией

$$f(\vartheta) = \frac{1}{\sin\vartheta H_0(\varkappa\sin\vartheta)}, \tag{11}$$

характеризующей направляющее действие внешней поверхности трубы на волны данной симметрии и поляризации, излучаемые открытым концом. Такая зависимость получается при любом внешнем симметричном „электрическом“ возбуждении идеально проводящей цилиндрической поверхности ([3–4]).

Так как при условии (4) области применимости неравенств (5) и (10) перекрываются, то поле излучения в заднем полупространстве можно характеризовать как результат развертывания цилиндрических волн и их искажения стенкой волновода при $\vartheta \to 0$. Эти два фактора отражаются формулами (9) и (11).

В переднем полупространстве $\pi/2<\vartheta<\pi$ волны от различных участков края интерферируют, создавая сложную сферическую волну. Поле излучения дается здесь формулой

$$H_{\varphi}=-\frac{4\pi a}{c}A\frac{\sin\frac{\vartheta_l}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}J_0(\varkappa\sin\vartheta)}{\cos\vartheta-\cos\vartheta_l}\frac{e^{ikR+U+U_l}}{R}, \tag{12}$$

причем функция Бесселя $J_0(\varkappa\sin\vartheta)$ как раз дает результат сложения волн, испускаемых источниками, симметрично распределенными по окружности радиуса a. Интересно, что при выполнении условия (5), когда функцию J_0 можно заменить ее асимптотическим выражением

$$J_0(\varkappa\sin\vartheta)=\frac{e^{-i\left(\varkappa\sin\vartheta-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\varkappa\sin\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\varkappa\sin\vartheta}}, \tag{13}$$

поле излучения в переднем полупространстве формально сводится к суперпозиции двух сферических волн. Действительно, первое слагаемое в формуле (13) дает волну (7), а второе слагаемое — аналогичную волну, расходящуюся от противоположного края стенки.

С точки зрения геометрической оптики, от каждого элемента края расходятся лучи в направлениях, к нему перпендикулярных, поэтому интерферировать могут только лучи от противоположных участков. Также понятно, что при $\vartheta\approx\pi$ лучевая трактовка становится неприменимой, ибо в направлении $\vartheta=\pi$ фокусируются лучи от всех точек края. При этом все интерферирующие в переднем полупространстве элементарные волны не могут проникать в заднее полупространство, так как эти волны задерживаются стенкой волновода, за исключением одной волны (7).

Функция U в показателях формул (1), (7) и (12) зависит от угла ϑ. Эта функция, разрывная при $\vartheta=\pi/2$, обеспечивает непрерывность поля излучения при переходе через плоскость $\vartheta=\pi/2$. Множитель e^U передает „вторичную" дифракцию расходящихся от каждой точки края первичных дифракционных волн. Этот множитель определяет при $\vartheta\approx\pi/2$ быстрый переход от „света" к „тени" для „второй волны" и при удалении от граничной плоскости $\vartheta=\pi/2$ стремится к единице. При условии (4) функция U выражается через универсальную функцию $U(s, q)$, введенную в нашей работе [5].

Слагаемое U_l в показателях тех же формул (1), (7) и (12) есть значение функции U для угла $\vartheta=\pi-\vartheta_l$. Множитель e^{U_l} отражает тот факт, что на самом деле дифрагирует не плоская волна на краю полуплоскости, а волноводная волна на краю волновода. Поэтому при сравнении с плоской волной амплитуду последней надо брать не равной амплитуде A волны в волноводе, а равной Ae^{U_l}. Впрочем, множитель e^{U_l} при условии (4) заметно отличается от единицы только для волн высоких номеров при частотах, близких к их критическим частотам, когда угол ϑ_l близок к $\pi/2$. В этом случае множитель e^{U_l} по абсолютной величине меньше единицы, что указывает на уменьшение излучения, связанное с заметным отражением распространяющейся волны от открытого конца волновода.

Такие же результаты получаются и для волн других типов. В случае несимметричных электромагнитных волн, однако, процесс „развертывания" происходит более сложным образом. Заметим, что, например, наличие в поле излучения электрической функции Герца при дифракции на открытом конце волновода несимметричной магнитной волны находит себе количественное объяснение при сравнении с дифракцией на крае полуплоскости.

Приведенный анализ точного решения одной из дифракционных задач должен представлять интерес для общей теории дифракции, особенно в связи с той ее формой, в которой дифракционная картина от отверстия рассматривается как результат интерференции волн, посылаемых различными элементами края этого отверстия.

Поступило
11 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 18, 1543 (1948). [2] Л. А. Вайнштейн, ДАН, 74, № 3 (1950). [3] F. Noether. Sow. Phys., 8, 1 (1935). [4] В. В. Владимирский, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 139 (1944). [5] Л. А. Вайнштейн, там же, 12, 166 (1948).