ДОКЛАДЫ Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. Л. ПОЛИСАР

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН И РЕАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

(Представлено академиком А. В. Винтером 29 VII 1950)

Мы уже сообщали о развитии нового направления в моделировании сложных систем взаимодействующих объектов (1). В ряде случаев (*) целесообразно моделирование лишь части объектов системы и изучение динамических режимов систем, состоящих из сочетания этих моделей с остальными незамещенными объектами. В сочетании с незамещенными объектами модели играют роль испытательных стендов.

Обобщением и дальнейшим развитием метода применения испытательных стендов в качестве звеньев замкнутой динамической системы является разработка принципов использования математических машин как универсальных моделей.

Поскольку дифференциальные уравнения, описывающие динамические процессы, являются математической моделью исследуемого явления, постольку и устройства, решающие широкие классы этих уравнений, можно рассматривать как универсальные модели в самом широком смысле этого слова. Следовательно, математические машины могут служить в качестве универсальных испытательных стендов, пригодных для сочетания их в динамическом режиме с реальными объектами.

С этой точки зрения счетно-решающие устройства можно разбить на две категории.

К 1-й категории универсальных решающих устройств с интересующей нас точки зрения относятся устройства непрерывного действия, в которых роль переменных играют натуральные величины — напряжения, перемещения, угол поворота и т. п. К числу их относятся, например, механический дифференциальный анализатор. К этой же категории могут быть отнесены и различного вида электромеханические и электронные эквивалентные схемы, электроинтеграторы.

Применение решающих устройств непрерывного действия в качестве испытательных стендов описано нами в предыдущих работах (5–7).

Ко 2-й категории универсальных решающих устройств относятся различного рода математические машины, осуществляющие с заданным приближением решение системы дифференциальных уравнений путем реализации разработанного алгоритма. Такие устройства выполняют определенную последовательность арифметических действий по одному из известных методов. Устройства эти повторяют определенный цикл операций, давая на выходе к концу каждого цикла приращение функции, соответствующее приращению аргумента. Они являются, таким образом, решающими устройствами прерывного циклического действия.

С точки зрения сочетания их с реальными объектами необходимо учитывать темп работы подобного рода машин. Отработка одного цикла, соответствующего приращению независимой переменной Δt, может совершаться математической машиной за время, меньшее Δt, равное ему или большее его.

Что касается принципов действия подобных машин, то они могут быть весьма различны. Машины, от которых требуется большая точность решений, обычно работают по счетно-импульсному методу. В настоящее время уже введены в эксплоатацию и строятся новые сложные вычислительные машины такого типа.

Если математическая машина должна быть включена в качестве модели в общую динамическую систему с незамещенными объектами, то масштаб времени в модели должен быть таким же, как в натуре, с тем, чтобы получить соответствие мгновенных значений величин в местах сочетания модели с объектами в натуре; либо же должны быть применены искусственные методы такого сочетания незамещенных объектов и моделей с различными масштабами времени, которые обеспечили бы возможность исследования динамических режимов с погрешностью, не превышающей заданную.

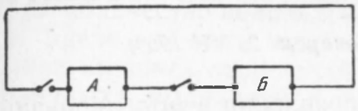

Рис. 1

Рассмотрим принципиальную возможность сочетания моделей и незамещенных объектов при условии, что масштабы времени в тех и других различны.

Пусть на рис. 1 четырехполюсник A означает модель, а четырехполюсник $Б$ — соответственно незамещенный объект. Принимаем параметры модели (математической машины) такими, что процессы в ней происходят быстрее, чем в замещаемом ею объекте.

Пусть масштаб времени в модели A будет в n раз меньше масштаба времени натуры.

Разобьем рассматриваемое явление во времени на отрезки Δt. В модели этому отрезку соответствует промежуток времени $\Delta t / n$. Пусть в какой-то момент времени модель приключается к объекту. Для конкретности пусть явления в модели описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В момент соприкосновения модель получает от реального объекта начальные значения зависимых переменных и значение так называемой правой части в системе уравнений, и пусть эти значения правых частей фиксируются при помощи каких-либо приспособлений. Реальный же объект получает начальные значения тех функций, по которым он связан с моделью, фиксируя эти значения на время Δt. Затем модель отключается от реального объекта, и явления в них развиваются порознь в течение промежутка времени Δt. По истечении промежутка времени $\Delta t / n$ (что соответствует Δt в натуре) „отсекается" процесс в модели и фиксируются значения всех переменных к концу этого промежутка.

Вслед за этим к началу отрезка $\Delta_2 t$ модель снова на мгновение приключается к реальному объекту, обмениваясь с ним значениями функций связи, и т. д. Такой режим работы „с отсечкой" дает принципиальную возможность связать с реальным объектом модель, в которой масштаб времени меньше натурального. Естественно, что при этом вводится некоторая дополнительная погрешность от разбиения на промежутки времени Δt, в течение которых мы считаем неизменными правые части уравнения, т. е. функции, по которым осуществлена связь между реальными объектами и моделями. Чем меньше величина Δt, тем меньше и указанная погрешность.

Погрешность такого сочетания может быть определена и компенсирована.

Рассмотрим решение указанным методом задачи:

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 - u_1,$$
$$\frac{du_2}{dt} = u_1 - u_2. \tag{1}$$

Реально решаемая система будет иметь вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2^{(\Delta t)} - y_1,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_1^{(\Delta t)} - y_2. \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2), получим уравнение ошибок:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \eta_2 - \eta_1 + y_2^{(\Delta t)} - y_2,$$
$$\frac{d\eta_2}{dt} = \eta_1 - \eta_2 + y_1^{(\Delta t)} - y_1. \tag{3}$$

После интегрирования получим:

$$\eta_1 + \eta_2 + \int\limits_0^t \left(y_2^{(\Delta t)} - y_2\right) dx + \int\limits_0^t \left(y_1^{(\Delta t)} - y_1\right) dx,$$

$$\eta_2 - \eta_1 = e^{-2t} \int\limits_0^t \left(y_1^{(\Delta t)} - y_1\right) e^{2x}\, dx - e^{-2t} \int\limits_0^t \left(y_2^{(\Delta t)} - y_2\right) dx.$$

Рассмотрение интегралов, входящих в эти равенства в момент времени $t = n\ \Delta t$, дает:

$$\int\limits_0^t \left[y_2^{(\Delta t)}(x) - y_2(x)\right] dx = -\frac{\Delta t}{2}\left[y_2(t) - y_2(0)\right] + \frac{2\vartheta}{3}(\Delta t)^2 M_2'' t.$$

Здесь

$$M_2'' = \max_{0 \leqslant x \leqslant t} |\, y_2''(x)\, |$$

Точно так же:

$$\int\limits_0^t \left[y_1^{(\Delta t)}(x) - y_1(x)\right] dx = \frac{\Delta t}{2}\left[y_1(t) - y_1(0)\right] + \frac{2}{3}\vartheta(\Delta t)^2 M_1'' t,$$

$$M_1'' = \max_{0 \leqslant x \leqslant t} |\, y_1''(x)\, |,$$

$$\int\limits_0^t \left[y_1^{(\Delta t)}(x) - y_1(x)\right] e^{2x}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left[y_1^{(\Delta t)}(x) - y_1(x)\right] e^{2x} dx.$$

Но опять при $t_{k-1} \leqslant x \leqslant t_n$

$$y^{(\Delta t)}(x) - y_1(x) = -(x - t_{k-1})\, y_1'(t_{k-1}) + \frac{\theta_2 M_{1k}''}{2}(x - t_{k-1})^2,$$

$$e^{2x} = e^{2t_k} - (t_k - x)\,\theta_1 e^{2t_k}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[y_1^{(\Delta t)}(x)-y_1(x)\right]e^{2x}dx=\frac{\Delta t}{2}\sum_{k=1}^{n}y'(t_{k-1})\,e^{2t_k}\Delta t+$$

$$+\vartheta_1\frac{(\Delta t)^2}{6}\sum_{k=1}^{n}y'(t_{k-1})\Big|\,e^{2t_k}\Delta t+\vartheta_2\frac{(\Delta t)^2}{6}\sum_{k=1}^{n}M''_{1k}e^{2t_k}\Delta t+$$

$$+\theta_1\theta_2\frac{(\Delta t)^3}{24}\sum_{k=1}^{n}e^{2t_k}M''_{1k}\Delta t.$$

Отсюда получаем нужные нам оценки.

Рассмотрим вопрос о компенсации ошибок. Запишем (2) в интегральной форме:

$$y_1(t)=y_1(0)+\int\limits_0^t\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx+\int\limits_0^t\left[y_2^{(\Delta t)}(x)-y_2(x)\right]dx,$$

$$y_2(t)=y_2(0)+\int\limits_0^t\left[y_1(x)-y_2(x)\right]dx+\int\limits_0^t\left[y_1^{(\Delta t)}(x)-y_1(x)\right]dx.$$

Но, как мы видели,

$$\int\limits_0^t\left[y_2^{(\Delta t)}-y_2\right]dx=-\frac{\Delta t}{2}\left[y_2(t)-y_2(0)\right]+k_2(\Delta t)^2,$$

$$\int\limits_0^t\left[y_1^{(\Delta t)}-y_1\right]dx=-\frac{\Delta t}{2}\left[y_1(t)-y_2(0)\right]+k_1(\Delta t)^2.$$

Поэтому, подавая на выход, соответственно, y_1 и y_2 в моменты времени $k\,\Delta t=t$ величины $\frac{\Delta t}{2}[y_2(t)-y_2(0)]$ и $\frac{\Delta t}{2}[y_1(t)-y_1(0)]$, мы сведем ошибку в решении к величинам порядка $(\Delta t)^2$, т. е. уничтожим основную часть ошибки решения. Процесс такой компенсации может быть продолжен.

Таким образом, имеется принципиальная возможность сочетания математических машин прерывного действия с испытуемыми объектами для исследования динамических режимов сложных систем.

Энергетический институт
Академии наук СССР
им. Г. М. Кржижановского

Поступило
28 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Л. Полисар, Техника воздушного флота, № 7 (1947); ДАН, 61, № 4 (1948).
[2] Г. Л. Полисар, Изв. АН СССР, ОТН, № 3 (1949).