Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. А. ЯКУБОВИЧ

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $y'' + p(t)y = 0, \quad p(t+\omega) = p(t)$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1950)

Готическими буквами будем обозначать векторы на плоскости, большими латинскими буквами — вещественные матрицы второго порядка, другими буквами — числа и множества.

Рассмотрим сначала систему двух уравнений вида:

$$\frac{d\mathfrak{f}}{dt} = A(t)\mathfrak{f}; \quad A(t) \text{ непрерывна}; \quad A(t+\omega) = A(t); \quad \operatorname{Sp} A(t) \equiv 0 \qquad (1)$$

($\operatorname{Sp} A(t)$ — сумма диагональных элементов).

Вопрос об ограниченности (при $-\infty < t < +\infty$) решений произвольной системы второго порядка с непрерывными периодическими коэффициентами сводится к рассмотрению системы вида (1). Такой вид имеют также системы, заданные в канонической форме.

Обозначим C^3 множество матриц $A(t)$, удовлетворяющих условиям из (1) (иначе говоря, C^3 — множество троек непрерывных вещественных периодических функций). После введения обычной метрики C^3 становится пространством Банаха. Ближайшая наша задача — рассмотреть, как устроено C^3 с точки зрения наличия ограниченных или неограниченных решений у системы (1).

Введем следующие обозначения: Π — множество тех $A(t)$, для которых по крайней мере одно решение системы (1) периодическое или антипериодическое периода ω $(\mathfrak{f}(t+\omega) = \pm\mathfrak{f}(t))$; Π^* — множество тех $A(t)$, для которых только одно решение периодическое или антипериодическое периода ω (второе будет неограничено); Π^{**} — все решения периодические или антипериодические периода ω; H — по крайней мере одно решение неограничено при $t \to +\infty$ $(-\infty)$; O — все решения ограничены на $(-\infty, +\infty)$, но нет периодических и антипериодических решений с периодом ω; $\Pi = \Pi^* \cup \Pi^{**}$, $C^3 = \Pi \cup H \cup O$, слагаемые не пересекаются. Обозначим $\varphi_\mathfrak{f} = \int\limits_0^\omega d \arg \mathfrak{f}(t)$ угол (с учетом знака), на который поворачивается вектор $\mathfrak{f}(t)$ за период ω. Если $\mathfrak{f}(t)$ — периодический или антипериодический вектор, то $\varphi_\mathfrak{f} = k\pi$, k — целое число. Пусть $P(t)$ такова, что существует и непрерывна dP/dt, $P(0) = E$, $P(t+\omega) = P(t)$, $\operatorname{Det} P(t) \equiv 1$. Задавая произвольно $\mathfrak{f}_0$, для $\mathfrak{f}(t) = P(t)\mathfrak{f}_0$ получим $\varphi_\mathfrak{f} = n\pi$ $(n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots)$. Можно показать, что n не зависит от $\mathfrak{f}_0$ и определяется только матрицей $P(t)$. Множество матриц $P(t)$ указанного вида, для которых $n = 0$, обозначим π_0. Вводим норму в π_0, равную $\max\limits_t \| P(t) \| + \max\limits_t \| dP/dt \|$ *, π_0 становится тогда связным метрическим пространством. Разобьем далее

* Норму матрицы $\| P(t) \|$ можно определить, например, как сумму модулей всех ее элементов.

трехмерное пространство R^3 так, как это показано на рис. 1, вращая нарисованную плоскую картинку вокруг горизонтальной оси (пунктирные линии не вращать).

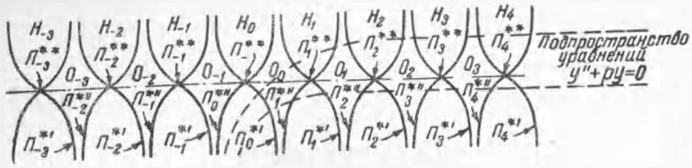

Рис. 1

Теорема 1. 1°. *C^3 гомеоморфно топологическому произведению $R^3 \times \pi_0$, причем множествам $O = \bigcup\limits_k O_k$, $H = \bigcup\limits_k H_k$, $\Pi^{**} = \bigcup\limits_k \Pi_k^{**}$, $\Pi^* = \bigcup\limits_k \Pi_k^*$ $(\Pi_k^* = \Pi_k^{*'} \cup \Pi_k^{*''})$, $\Pi = \bigcup\limits_k \Pi_k\,(\Pi_k = \Pi_k^* \cup \Pi_k^{**})$ в R^3 соответствуют множества $O, H, \Pi^{**}, \Pi^*, \Pi$ в C^3. Таким образом, $O \subseteq C^3$ распадается на счетное число открытых связных компонент и т. д.*

В дальнейшем под множествами $O_k, \Pi_k, \ldots$ будем понимать соответствующие множества в C^3.

2°. *$A(t) \in O_k$ тогда и только тогда, если $A(t) \in O$ и если для (любого) соответствующего решения $f(t)$ $k\pi < \varphi_f < (k+1)\pi$, $A(t) \in H_k$ тогда и только тогда, если $A(t) \in H$ и если для двух линейно независимых решений $\varphi_f = k\pi$. Для остальных либо $(k-1)\pi < \varphi_f < k\pi$, либо $k\pi < \varphi_f < (k+1)\pi$. Аналогично, Π_k определяется условием $\varphi_f = k\pi$ для периодического или антипериодического решения. Для остальных либо $(k-1)\pi < \varphi_f < k\pi$, либо $k\pi < \varphi_f < (k+1)\pi$.*

В 2° вместо столбца $f(t)$ матрицы фундаментальной системы решений $X(t)$ можно брать строку $\mathfrak{G}(t)$. Тогда φ_f следует заменить на $\pm\varphi_{\mathfrak{G}}$, где знак обратен знаку $\operatorname{Det} X(t)$.

Как следствия теоремы 1 получаются следующие принципы, годные для определения критериев ограниченности решений системы (1).

I. *Если $M \subset C^3$ удовлетворяет условиям:* а) *M связно;* б) *$M \cap O_k$ не пусто;* в) *пересечение M с границей O пусто, то $M \subseteq O_k$.*

II. *Если $M \subset C^3$ удовлетворяет условиям* а), в) *в* (1) *и* б$'$) *$\overline{M} \cap \Pi_k$, $\overline{M} \cap \Pi_{k+1}$ не пусты, то $M \subseteq O_k$.*

Частным случаем системы (1) является уравнение

$$y'' + p(t)\,y = 0; \quad p(t) \text{ непрерывна}; \quad p(t+\omega) = p(t). \tag{2}$$

При определенном способе сведения уравнения (2) к системе (1) соответствующие $A(t)$ заполняют сдвинутое подпространство в C^3, которое расположено так, как это указано на рис. 1. Будем теперь под Π_k, $O_k, \ldots$ понимать пересечения Π_k, $O_k, \ldots$ с этим подпространством.

Можно доказать: для того чтобы $p \in \Pi_k$, необходимо и достаточно, чтобы $p \in \Pi$ и чтобы соответствующее периодическое или антипериодическое (периода ω) решение имело ровно k нулей на любом полуинтервале $[t, t+\omega)$. Для того чтобы $p(t) \in H_k$, необходимо и достаточно, чтобы $p \in H$ и чтобы нашлись 2 линейно независимых решения, имеющие ровно k нулей на любом полуинтервале $[t, t+\omega)$. Если $p(t) \in O_k$, то любое решение на $[t, t+\omega)$ имеет либо k, либо $k+1$ нулей.

Отсюда связь с осцилляционной теоремой дается следующим утверждением. Для того чтобы $p(t) \in O_k$ (H_k), необходимо и достаточно, чтобы для уравнения

$$y'' + (p(t) + \lambda)\,y = 0 \tag{3}$$

точка $\lambda = 0$ принадлежала k-му интервалу устойчивости (неустойчивости). Для того чтобы $p(t) \in \Pi_k$, необходимо и достаточно, чтобы точка $\lambda = 0$ совпала с одной из границ k-го интервала неустойчивости ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Для функций $p(t) \in \Pi_k^{**}$ можно получить общую формулу. Именно, $p(t) \in \Pi_k^{**}$ тогда и только тогда, если $p(t) = \frac{k^2\pi^2}{r(t)^4} - \frac{r''(t)}{r(t)}$, где

$$r''(t) \text{ непрерывна}; \quad r(t+\omega) = r(t); \quad r(t) > 0; \quad \int_0^\omega \frac{dt}{r(t)^2} = 1. \qquad (4)$$

Используя II (принципы I и II переносятся без изменения на случай уравнения (2)) и теорему сравнения, можно получить следующий критерий.

Критерий ограниченности 1. *Пусть $r_1(t)$ и $r_2(t)$ — произвольные функции, удовлетворяющие* (4). *Если* $\frac{k'\pi^2}{r_1(t)^4} - \frac{r_1''(t)}{r_1(t)} \underset{\neq}{\leqslant} p(t) \underset{\neq}{\leqslant} \frac{(k+1)^2\pi^2}{r_2(t)^4} - \frac{r_2''(t)}{r_2(t)}$, *то* $p(t) \in O_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Следствие. *В любом O_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ имеются $p(t)$ с отрицательным и сколь угодно большим по модулю средним значением.*

Взяв в критерии 1 $r_1(t) = r_2(t) \equiv \mathrm{const}$, получим известный критерий Н. Е. Жуковского ([1]). Используя I и неравенства, доказанные G. Börg'ом ([2]), в которых знаки $\leqslant$ следует для данного случая заменить на $<$, можно получить, например, следующие критерии.

Критерий ограниченности 2. $\frac{\pi^2k^2}{\omega^2} \leqslant c^2 < \frac{\pi^2(k+1)^2}{\omega^2}$. *Если* $p(t) \underset{\neq}{\geqslant} \frac{\pi^2k^2}{\omega^2}$ *и* $\int_0^\omega |p(t) - c^2|\, dt \leqslant 2c(k+1)C \operatorname{tg} \frac{\omega c}{2(k+1)}$, *то* $p(t) \in O_k (k=0,1,\ldots)$.

Критерий ограниченности 3. $\frac{\pi^2k^2}{\omega^2} < c^2 \leqslant \frac{\pi^2(k+1)^2}{\omega^2}$. *Если* $p(t) \underset{\neq}{\leqslant} \frac{\pi^2(k+1)^2}{\omega^2}$ и $\int_0^\omega |p(t) - c^2|\, dt \leqslant \omega c \left(c - \frac{\pi k}{\omega}\right)$, *то* $p(t) \in O_k$ $(k=0, 1,\ldots)$.

Критерий 2 для $k = 0$, $c = 0$ есть классический критерий Ляпунова. Критерий 2 для $k = 1$, $c = \pi/\omega$ и критерий 3 для $k = 0$, $c = \pi/\omega$ являются (улучшенными) критериями, полученными Р. С. Гусаровой ([1]). В критерии 2 для $k = 0$ условие $p(t) \geqslant 0$ можно заменить условием $\int_0^\omega p(t)\,dt \geqslant 0$, $p(t) \not\equiv 0$. Из метода получения следует, что, оставляя одно из неравенств для $p(t)$ в критериях 1—3, второе улучшить нельзя. Вводя дополнительные условия, критерии можно усилить. Предполагая, например, $\pm a^2 \leqslant p(t) \leqslant b^2$, можно получить критерии, аналогичные 2 и 3. Для этого нужно использовать неравенства, аналогичные неравенствам Börg'a. Однако эти критерии громоздки; при их применении нужно решать трансцендентные уравнения.

В основу работы положены идеи И. М. Гельфанда, высказанные им на семинаре в МГУ зимой 1948/49 г. По инициативе И. М. Гельфанда автор занялся разбираемыми здесь вопросами и пользуется случаем, чтобы выразить ему глубокую признательность и благодарность.

Поступило
6 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. С. Гусарова, Прикладн. матем. и мех., **13**, 3 (1949). [2] G. Börg, Ark. för Matem., Astr. och Fysik, **31** A, No. 1 (1944).