Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Е. СЛИВИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком Н. М. Крыловым 14 VIII 1950)

Н. П. Еругин в заметке [1] рассмотрел систему

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = v(x, y), \tag{1}$$

где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши — Римана, и показал, что в этом случае решение системы (1) легко строится при помощи квадратуры.

Целью настоящей заметки является обобщение системы Н. П. Еругина в связи с обобщением теории функций комплексного переменного, указанного в работах [2-4].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_0}{dt} = u_0(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = u_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = u_{n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

и будем предполагать, что функции $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ удовлетворяют условиям моногенности Н. М. Крылова [4]:

$$\theta_k^{(h)}\left(p_i \,\Big|\, \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) = 0, \tag{3}$$

$p_i = \text{const}$ $(i, k, \mu, \nu = 0, \ldots, n-1;\ h = 1, \ldots, n-1)$.

Легко видеть, что общее решение системы (2) получается с помощью квадратуры. В самом деле, рассмотрим комплексное переменное Золотарева — Крылова

$$z = x_0 + \omega x_1 + \cdots + \omega^{n-1} x_{n-1}, \tag{4}$$

где ω есть корень некоторого алгебраического уравнения степени n

$$\omega^n = p_0 + p_1\omega + \cdots + p_{n-1}\omega^{n-1} \tag{5}$$

с постоянными коэффициентами p_i.

Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \omega \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \omega^{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt}. \tag{6}$$

Следовательно, в силу условий моногенности (3), системе (2) можно придать вид:

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \tag{7}$$

где

$$f(z) = u_0 + \omega u_1 + \cdots + \omega^{n-1} u_{n-1}, \tag{8}$$

причем, в силу условий моногенности (3), $f(z)$ есть аналитическая функция переменного Золотарева — Крылова.

Теперь уравнение (7) легко решается с помощью квадратуры

$$\int \frac{dz}{f(z)} = t + C. \tag{9}$$

Представляя произвольную постоянную C в виде комплексного числа:

$$C = C_0 + \omega C_1 + \cdots + \omega^{n-1} C_{n-1} \tag{10}$$

и отделяя коэффициенты при ω^k $(k = 0, \ldots, n-1)$, получим n решений системы (2).

Особенно просто выполняются указанные выше вычисления в том случае, когда $f(z)$ рациональная функция z, т. е. когда $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ — рациональные функции переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Отсюда видно, что обобщение теории функций комплексного переменного за счет рассмотрения переменного Золотарева — Крылова дает значительные облегчения при интегрировании дифференциальных уравнений вида Н. П. Еругина.

Рассмотрим пример. Пусть дана система

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= x_0^2 + 2x_1 x_2, \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2^2 + 2x_0 x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1^2 + 2x_0 x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Как легко видеть, правые части системы (11) удовлетворяют условиям моногенности (3) для случая, когда уравнение (5) имеет вид $\omega^3 = 1$ [2]. Следовательно, система (11) после указанных преобразований примет вид

$$\frac{dz}{dt} = z^2. \tag{12}$$

Общее решение этой системы будет

$$z = -\frac{1}{t + C}. \tag{13}$$

Положив в (13)

$$C = C_0 + \omega C_1 + \omega^2 C_2,$$

$$z = x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2,$$

после несложных вычислений получим три решения системы (11):

$$x_0 = -\frac{(t+C_0)^2 - C_1C_2}{(t+C_0)^3 - 3C_1C_2(t+C_0) + C_1^3 + C_2^3},$$

$$x_1 = \frac{C_1(t+C_0) - C_2^2}{(t+C_0)^2 - 3C_1C_2(t+C_0) + C_1^3 + C_2^3}, \tag{14}$$

$$x_2 = \frac{C_2(t+C_0) - C_1^2}{(t+C_0)^3 - 3C_1C_2(t+C_0) + C_1^3 + C_2^3}.$$

Если правые части системы (2) зависят явно от t, но в условиях (3) t рассматривается как параметр, то уравнение (7) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = f(z;\, t). \tag{15}$$

Тем самым система n дифференциальных уравнений приведена к одному уравнению первого порядка.

Точно так же система интегро-дифференциальных уравнений

$$a_0(t)\frac{d^m x_i}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1} x_i}{dt^{m-1}} + \cdots + a_m(t)x_i =$$

$$= u_i(t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) + \int_0^1 K_0(t, s)\, u_i^{(0)}(s, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, ds +$$

$$+ \int_0^1 K_1(t, s)\, u_i^{(1)}\left(s, \frac{d\xi_0}{ds}, \frac{d\xi_1}{ds}, \ldots, \frac{d\xi_{n-1}}{ds}\right) ds + \cdots$$

$$\cdots + \int_0^1 K_r(t, s)\, u_i^{(r)}\left(s, \frac{d^r\xi_0}{ds^r}, \frac{d^r\xi_1}{ds^r}, \ldots, \frac{d^r\xi_{n-1}}{ds^r}\right) ds,$$

$$\xi_i = x_i(s) \quad (i = 0, \ldots, n-1),$$

где функции u_i, $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}, \ldots, u_i^{(r)}$ удовлетворяют условиям моногенности, аналогичными преобразованиями приводится к одному уравнению

$$a_0(t)\frac{d^m z}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1} z}{dt^{m-1}} + \cdots + a_m(t)z =$$

$$= f(z;\, t) + \int_0^1 \left[K_0 f_0(s, \zeta) + K_1 f_1\left(s, \frac{d\zeta}{ds}\right) + \cdots + K_r f_r\left(s, \frac{d^r\zeta}{ds^r}\right)\right] ds.$$

Аналогичные упрощения имеют место и для уравнений с запаздывающим аргументом.

Ташкентский институт
инженеров железнодорожного
транспорта

Поступило
25 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Еругин, Прикладн. математ. и мех., **14**, в. 3 (1950). [2] Н. М. Крылов, ДАН, **55**, № 8 (1947). [3] А. С. Мейлихзон, ДАН, **58**, № 6 (1947). [4] В. Е. Сливинский, ДАН, **72**, № 3 (1950).