Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. А. МАРЧЕНКО

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 VI 1950)

1. Обозначим через L заданный на оси $-\infty < t < \infty$ дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L[u] = u''(t) - q(t)\,u(t), \tag{I}$$

где $q(t)$ — вещественная, четная и непрерывная на оси $-\infty < t < \infty$ функция.

Свяжем, следуя Дельзарту [1], с каждой парой операторов $\underset{x}{L_1}$, $\underset{y}{L_2}$ вида

$$\underset{x}{L_1}[u] = u''_{xx} - q_1(x)\,u, \quad \underset{y}{L_2}[u] = u''_{yy} - q_2(y)\,u$$

оператор обобщенного сдвига T_x^y, определив его сперва на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $f(x)$ равенством

$$T_x^y[f] = v(x, y; f),$$

где $v(x, y; f)$ — решение уравнения в частных производных

$$\underset{x}{L_1}[v] = \underset{y}{L_2}[v] \tag{1}$$

при начальных данных

$$v(x, y; f)\,|_{y=0} = f(x), \qquad v'_y(x, y; f)\,|_{y=0} = 0. \tag{2}$$

Метод Римана интегрирования уравнения (1) позволяет естественным образом расширить оператор T_x^y на все функции $f(x)$, суммируемые в каждом конечном интервале вещественной оси [2].

Определение. Непрерывная на оси $-\infty < x < \infty$ функция $f(x)$ называется $\{L_1, L_2\}$ почти-периодической, если семейство функций $T_x^y[f]$ (y — параметр) компактно в смысле равномерной сходимости на всей оси $-\infty < x < \infty$ (здесь T_x^y — оператор обобщенного сдвига, связанный с операторами $\underset{x}{L_1}$, $\underset{y}{L_2}$).

Основной задачей теории $\{L_1, L_2\}$ почти-периодических функций является нахождение их конструктивной характеристики.

Б. М. Левитан рассматривал эту задачу [3,4] в предположении, что функции $q_1(x)$ и $q_2(y)$, отвечающие операторам $\underset{x}{L_1}$ и $\underset{y}{L_2}$, удовлетворяют дополнительному ограничению

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\,|q_1(x)|\,dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + y^2)\,|q_2(y)|\,dy < \infty. \tag{II}$$

Ограничение (II) позволило Б. М. Левитану вплотную подойти к решению основной задачи. Но и для этого случая решение в окончательной форме им не было найдено из-за отсутствия точных данных о строении операторов преобразования*.

В настоящей заметке мы даем полное решение основной задачи теории $\{L_1, L_2\}$ почти-периодических функций, предполагая ограничение (II) выполненным.

2. Принципиально важно решить поставленную задачу прежде всего для простейшего случая, когда $q_1(x) \equiv q_2(y) \equiv 0$. Оператор обобщенного сдвига, соответствующий этому частному случаю, мы обозначим через S_x^y. Он имеет простой вид:

$$S_x^y[f] = \frac{1}{2}\{f(x+y) + f(x-y)\}.$$

Коструктивную характеристику соответствующего класса обобщенных почти-периодических функций дает следующая лемма.

Лемма. *Пусть $f(x)$ — непрерывная на оси $-\infty < x < \infty$ функция. Для того чтобы семейство функций*

$$S_x^y[f] = \frac{1}{2}\{f(x+y) - f(x-y)\}$$

(y — параметр) было компактно в смысле равномерной сходимости на оси $-\infty < x < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела вид

$$f(x) = cx + \varphi(x),$$

где c — константа, а $\varphi(x)$ — почти-периодическая функция Г. Бора.

Для четных функций $f(x)$ эта лемма была ранее доказана Б. М. Левитаном [3].

3. Пусть теперь $q_1(x)$ и $q_2(y)$ — произвольные четные функции, удовлетворяющие условию (II). Обозначим, как и в [5], через $\omega_h(\lambda, t)$ решения уравнения

$$L[u] + \lambda u = 0 \tag{3}$$

при начальных данных

$$\omega_h(\lambda, 0) = 1, \quad \omega_h'(\lambda, 0) = h, \quad \text{если} \quad h \neq \infty;$$
$$\omega_h(\lambda, 0) = 0, \quad \omega_h'(\lambda, 0) = 1, \quad \text{если} \quad h = \infty,$$

где L — оператор вида (I), а h и λ — произвольные вещественные числа.

Если $\omega_h^{(1)}(\lambda, x)$ — решение уравнения (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$, то из определения оператора обобщенного сдвига T_x^y, связанного с операторами $\underset{x}{L_1}$, $\underset{y}{L_2}$, следует

$$T_x^y[\omega_h^{(1)}(\lambda, x)] = \omega_x^{(1)}(\lambda, x)\,\omega_0^{(2)}(\lambda, y), \tag{4}$$

где $\omega_0^{(2)}(\lambda, y)$ — решение уравнения для оператора $\underset{y}{L_2}$.

Обозначим через $\Lambda_0(\Lambda_\infty)$ множество тех значений параметра λ, при которых четные (нечетные) решения уравнения (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$ являются $\{L_1, L_2\}$ почти-периодическими функциями. Из формулы (4) и условия (II) следует, что множество $\Lambda_0(\Lambda_\infty)$ состоит из всех положительных и, возможно, некоторого конечного числа неположительных

* Мы придерживаемся здесь и дальше терминологии заметки [5].

значений параметра λ. Входящие в $\Lambda_0 (\Lambda_\infty)$ отрицательные значения параметра λ являются общими характеристическими числами некоторых краевых задач для операторов $\underset{x}{L_1}$ и $\underset{y}{L_2}$. Принадлежность значения $\lambda=0$ множеству $\Lambda_0 (\Lambda_\infty)$ зависит от ограниченности или неограниченности функций $\omega_0^{(1)}(0, x)(\omega_\infty^{(1)}(0, x))$ и $\omega_0^{(2)}(0, y)$. Так например, если $q_2(y) \equiv 0$, то множество $\Lambda_0 = \Lambda_\infty$ и состоит из всех положительных значений λ и точки 0; если $q_1(x) \neq 0$, $q_2(y) \neq 0$, $q_1(x) \geqslant 0$, то множество $\Lambda_0 = \Lambda_\infty$ и состоит из одних положительных значений параметра λ, и т. д.

4. Четные и нечетные $\{L_1, L_2\}$ почти-периодические решения уравнений (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$ и являются теми элементарными функциями, по которым (в известном смысле) можно разложить любую $\{L_1, L_2\}$ почти-периодическую функцию.

Обозначим через $\sigma(x)$ линейную комбинацию $\{L_1, L_2\}$ почти-периодических решений уравнений (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$:

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k \omega_{hk}^{(1)}(\lambda_k, x) \tag{5}$$

(здесь $\lambda_k \in \Lambda_{h_k}$, $h_k = 0$ или ∞, C_k — комплексные константы).

Основная теорема. *Пусть операторы $\underset{x}{L_1}$ и $\underset{y}{L_2}$ удовлетворяют условию* (II). *Для того чтобы функция $f(x)$ была $\{L_1, L_2\}$ почти-периодической, необходимо и достаточно, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ всегда можно было найти такую функцию $\sigma(x)$ вида* (5), *что*

$$\sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty}} | T_x^y [f(x) - \sigma(x)] | < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы основано на предыдущей лемме и результатах заметки ([5]), где подробно рассмотрено строение операторов преобразования.

5. Замечание 1. Из основной теоремы следует: для принадлежности функции $f(x)$ к классу $\{L_1, L_2\}$ почти-периодических функций, необходимо, чтобы ее можно было равномерно на оси $-\infty < x < \infty$ и сколь угодно точно апроксимировать линейными комбинациями $\{L_1, L_2\}$ почти-периодических решений уравнений (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$. Однако в общем случае это условие не достаточно. Оно необходимо и достаточно, если функция $\omega_0^2(0, y)$ ограничена (например, если $q_2(y) \equiv 0$).

Замечание 2. Основная теорема позволяет развить для (L_1, L_2) почти-периодических функций аппарат рядов Фурье, в котором ортогональной системой являются $\{L_1, L_2\}$ почти-периодические решения уравнений (3) для оператора $\underset{x}{L_1}$. При этом любой метод суммирования рядов Фурье почти-периодических функций Г. Бора пригоден и в этом случае.

В заключение отметим, что результаты этой заметки переносятся на операторы обобщенного сдвига, определяемые более общими начальными данными, чем (2).

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
27 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Delsartes, Journ. de Math. pures et appl., **17**, sér. 9, 213 (1938) [2] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **23** (65), в. 1, 3 (1948). [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4**, в. 1 (29), 3 (1949). [4] Б. М. Левитан, Матем. сборн., **24** (66), в. 3, 321 (1949). [5] В. А. Марченко, ДАН, **74**, № 3 (1950).