Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Б. ДЕМЬЯНОВ

О КУБИЧЕСКИХ ФОРМАХ В ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 VIII 1950)

В одной работе Хассе (1) доказывается следующая теорема. Всякая квадратичная форма над полем p-адических чисел представляет 0 в этом поле, если число ее переменных больше 4.

Морделл показал (2), что для любого n над полем p-адических чисел существуют формы степени n от n^2 переменных, не представляющие 0 в этом поле. Возникла гипотеза (см., например, (2)), что всякая форма степени n от n^2+1 переменных над полем p-адических чисел представляет 0 в этом поле. В настоящей работе эта гипотеза доказывается для кубических форм в случае $p\neq 3$.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_s)$ — кубическая форма над некоторым полем K. Обозначим коэффициенты $F(x_1, \ldots, x_s)$ так: при x_i^3 — через a_i, при $x_i^2 x_k$ — через a_{ik}, при $x_i x_j x_k$ — через a_{ijk}. Если для всех i и j при $i<j$ имеет место $a_{ij}=0$, мы будем говорить, что $F(x_1, \ldots, x_s)$ имеет треугольный вид.

Лемма. *Если характеристика поля K не равна 3 и $F(x_1, \ldots, x_s)$ не представляет 0 в K, то можно невырожденным линейным преобразованием с коэффициентами из K привести $F(x_1, \ldots, x_s)$ к треугольному виду.*

Доказательство. Пусть для $i<k$ уже имеем a_{ij} для всех $j>i$. $a_k\neq 0$, ибо в противном случае $F(x_1, \ldots, x_s)$ представляла бы 0. Сделаем преобразование:

$$x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1},$$

$$x_k = y_k - \frac{a_{k,\,k+1}}{3a_k} y_{k+1} - \cdots - \frac{a_{k,s}}{3a_k} y_s,$$

$$x_{k+1} = y_{k+1}, \ldots, x_s = y_s.$$

Легко видеть, что в получающейся форме от $y_1, \ldots, y_s$ равны 0 коэффициенты при $y_i^2 y_j$ уже для $i \leqslant k$ и для всех $j>i$. Так как наше преобразование невырожденное, лемма доказана.

Пусть теперь K — полное дискретно нормированное поле, J — кольцо целых элементов K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал этого кольца, π — образующий элемент $\mathfrak{p}$, $P = J/\mathfrak{p}$ — поле классов вычетов.

Теорема. *Пусть всякая кубическая форма над полем P представляет 0 в P, если число ее переменных больше t. Пусть характеристика P не равна 3. Тогда всякая кубическая форма $F(x_1, \ldots, x_s)$ над полем K представляет 0 в K, если $s>3t$.*

Доказательство. Так как характеристика P не равна 3, характеристика K тоже не равна 3. Поэтому, согласно лемме, можно считать, что $F(x_1, \ldots, x_s)$ имеет треугольный вид. Далее, можно также считать, что все a_i целые и не делятся на $\mathfrak{p}^3$. Так как $s > 3t$, найдется $t+1$ переменных таких, что максимальная степень $\mathfrak{p}$, на которую делятся коэффициенты при их кубах, одна и та же. Обозначим эти $t+1$ переменных через $y_1, \ldots, y_{t+1}$ в порядке их следования среди $x_1, \ldots, x_s$, остальные переменные положим равными 0. Далее, умножим все на такую степень π, чтобы все коэффициенты оставшейся формы от $y_1, \ldots, y_{t+1}$ стали целыми и хотя бы один из них не делился на $\mathfrak{p}$. Полученную окончательно форму обозначим $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$, а ее коэффициенты b_i, b_{ij}, b_{ijk}. Очевидно, что $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ имеет треугольный вид. Покажем, что она представляет 0. Тем самым будет доказана теорема.

Достаточно показать, что сравнение

$$\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{1}$$

имеет такое нетривиальное решение

$$y_1 \equiv \eta_1 \pmod{\mathfrak{p}}, \ldots, y_{t+1} \equiv \eta_{t+1} \pmod{\mathfrak{p}},$$

что хотя бы для одного k

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial y_k}(\eta_1, \ldots, \eta_{t+1}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}. \tag{2}$$

Действительно, решая уравнения

$$\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1}) = 0$$

тогда можно найти в виде

$$y_i = \eta_i \quad \text{при} \quad i \neq k; \quad y_k = \eta_k + \pi\xi_1 + \cdots + \pi^n \xi_n + \cdots,$$

где ξ_n находится из условия

$$\overline{F}(\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}, \eta_k + \pi\xi_1 + \cdots + \pi^n\xi_n, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{t+1}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}}.$$

Рассмотрим три возможных случая.

1. Среди коэффициентов, не делящихся на $\mathfrak{p}$, нет коэффициентов вида b_i и b_{ij}. Тогда есть хотя бы один коэффициент b_{klm}. Положим

$$y_k = 0; \qquad y_l = y_m = 1; \qquad y_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, l, m.$$

При этих значениях имеют место соотношения (1) и (2), значит, $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ представляет 0.

2. Среди коэффициентов, не делящихся на $\mathfrak{p}$, нет коэффициентов вида b_i, но есть коэффициент b_{lk}. Тогда $b_{kl} = 0$, ибо $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ имеет треугольный вид. Положим

$$y_k = 0; \qquad y_l = 1; \qquad y_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k, l.$$

При этих значениях имеют место соотношения (1) и (2), значит, $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ представляет 0.

3. Среди коэффициентов, не делящихся на $\mathfrak{p}$, есть хотя бы один вида b_i. Тогда все b_i не делятся на $\mathfrak{p}$, ибо, по построению $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$, максимальная степень $\mathfrak{p}$, на которую делятся b_i, одна и та же. В этом

случае в сравнение (1) входят все $t+1$ переменных, а поэтому оно имеет нетривиальное решение

$$y_1 \equiv \eta_1 \pmod{\mathfrak{p}}, \ldots, y_{t+1} \equiv \eta_{t+1} \pmod{\mathfrak{p}}$$

в силу предположения о поле классов вычетов P. Пусть

$$\eta_k \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}; \qquad \eta_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{при} \quad i < k.$$

Тогда η_k является корнем сравнения

$$\overline{F}(0, \ldots, 0, y_k, \eta_{k+1}, \ldots, \eta_{t+1}) = b_k y_k^3 + A y_k + B \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{3}$$

(членов с y_k^2 нет, ибо $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ имеет треугольный вид).

Если η_k — простой корень сравнения (3), то имеет место (2), и $\overline{F}(y_1, \ldots, y_{t+1})$ представляет 0. Если η_k — двукратный корень сравнения (3), то третий корень $\overline{\eta}_k$ будет простым, и мы можем взять его вместо η_k. А трехкратным корнем сравнения (3) η_k быть не может, ибо тогда мы имели бы

$$b_k y_k^3 + A y_k + B \equiv b_k (y_k - \eta_k)^3 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Сравнивая коэффициенты при y_k^2 слева и справа, получим $-3 b_k \eta_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, что не так, ибо ни один из сомножителей на $\mathfrak{p}$ не делится.

Теорема доказана.

Из одной теоремы Шевалле ([3]) следует, что всякая форма степени n над конечным полем представляет 0 в этом поле, если число ее переменных больше n. Из нашей теоремы можно поэтому получить следующее следствие.

Следствие. Пусть K — полное дискретно нормированное поле с конечным полем классов вычетов, характеристика которого не равна 3 (например, поле p-адических чисел при $p \neq 3$). Тогда всякая кубическая форма над полем K представляет 0 в K, если число ее переменных больше девяти.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hasse, Journ. f. reine u. angew. Math., **152**, 129 (1923). [2] L. J. Mordell, Journ. London Math. Soc., **12**, 127 (1937). [3] C. Chevalley, Abh. Math. Sem. Hamb. Univ., **11**, 73 (1936).