Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

В. М. ГЛУШКОВ

К ТЕОРИИ ZA-ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 3 VIII 1950)

В настоящей заметке исследуются соотношения между рангом в смысле С. Н. Черникова (1) и рангами в смысле А. И. Мальцева (2) в случае групп, обладающих возрастающим центральным рядом (ZA-групп), причем для ZA-групп без кручения устанавливается свойство (подсказанное автору С. Н. Черниковым), аналогичное локальной конечности для периодических групп (см. теорему 4). Это свойство используется для обобщения в разных направлениях теоремы 3 работы А. И. Мальцева (3). Употребляющиеся ниже понятия рационального ряда и пополнения содержатся в работах (1,3,4).

1. Теорема 1. *Пополнение ZA-группы $\mathfrak{G}$ без кручения с длиной рационального ряда, равной γ, имеет корневой ряд длины γ.*

Доказательство. Пусть $E_0 = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_\gamma = \mathfrak{G}$ — рациональный ряд группы $\mathfrak{G}$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{G}$ вложена в некоторую полную ZA-группу $\mathfrak{B}$ без кручения (3) и обозначать $\mathfrak{G}_\alpha^*$ пополнение (в $\mathfrak{B}$) подгруппы $\mathfrak{G}_\alpha$. Так как для $\gamma = 1$ теорема очевидна, то предположим ее доказанной для всех $\mathfrak{G}_\alpha$ при $\alpha < \gamma$.

Если γ предельное, то $\mathfrak{G}' = \sum\limits_{\alpha<\gamma} \mathfrak{G}_\alpha^*$, очевидно, будет пополнением группы $\mathfrak{G}$ с корневым рядом длины γ.

Если γ непредельное, то, по предположению, $\mathfrak{G}_{\gamma-1}^*$ имеет корневой ряд длины $\gamma - 1$ и, ввиду теоремы 7 из (3), является нормальным делителем в $\mathfrak{G}_\gamma^* = \mathfrak{G}^*$. Выберем в $\mathfrak{G}$ элемент A, не содержащийся в $\mathfrak{G}_{\gamma-1}$, и пусть $\mathfrak{A}^*$ — пополнение циклической подгруппы $\mathfrak{A}$ элемента A. Легко видеть, что $\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{G}_{\gamma-1}^* = E$, и потому группа $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_{\gamma-1}^* \mathfrak{A}^*$ имеет корневой ряд длины γ. Но $\mathfrak{G}'$ совпадает с пополнением $\mathfrak{G}^*$ группы $\mathfrak{G}$. В самом деле, нетрудно показать, опираясь на полноту $\mathfrak{G}'$ и однозначность извлечения корня в $\mathfrak{B}$ (3), что $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}'$. Но тогда, ввиду свойства минимальности пополнения ((3), § 2) и очевидного включения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}^*$, имеем просто $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}^*$, что и требовалось.

Доказанная теорема показывает, что ранг в смысле С. Н. Черникова сохраняется при переходе к пополнению. Ранги в смысле А. И. Мальцева этим свойством не обладают (3).

2. Теорема 2. *Для того чтобы ZA-группа $\mathfrak{G}$ имела конечное число образующих, необходимо и достаточно, чтобы она обладала конечным нормальным рядом с циклическими факторами.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость устанавливается следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих. Тогда она нильпотентна ((3), стр. 212) и, как нетрудно показать, все факторы ее убывающего ряда коммутантов имеют конечное число образующих. Требуемый нормальный ряд группы $\mathfrak{G}$ получается теперь очевидным уплотнением ее убывающего ряда коммутантов.

Следствие 1. *Любая подгруппа ZA-группы $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих имеет конечное число образующих. Минимальные числа образующих всех подгрупп группы $\mathfrak{G}$ ограничены в совокупности.*

Следствие 2. *ZA-группа без кручения с конечным числом образующих имеет конечный рациональный ряд с циклическими факторами* (см. также ([5]), стр. 24).

Теорема 2 и следствия из нее теряют силу даже для двухступенно разрешимых групп, как показывает пример группы с образующими A_i $(i=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, B и определяющими соотношениями $[A_i, A_j]=1$ $(i=\ldots, -1, 0, 1, \ldots; j=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, $B^{-1}A_iB = A_{i+1}$ $(i=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$.

Условимся в дальнейшем обозначать буквой r ранг ZA-группы без кручения в смысле С. Н. Черникова, r_1 — общий и r_2 — специальный ранги в смысле А. И. Мальцева. В случае абелевых групп без кручения $r=r_1=r_2$. Для ZA-групп без кручения соотношение между r, r_1 и r_2 дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Для ZA-групп без кручения имеет место неравенство $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r$, причем из конечности одного из рангов r_2 или r следует конечность всех остальных рангов.*

Доказательство. Неравенство $r_1 \leqslant r_2$ есть очевидное следствие определения рангов r_1 и r_2 ([2]). Далее, любая подгруппа $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих группы $\mathfrak{G}$ конечного ранга r имеет рациональный ряд с циклическими факторами (следствие 2 из теоремы 2), длина которого l, очевидно, не превосходит r; но тогда $\mathfrak{A}$ имеет систему образующих, содержащую l элементов, т. е. $r_2 \leqslant r$.

Итак, неравенство $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r$ доказано. Попутно установлено, что из конечности ранга r следует конечность r_2, а следовательно, и r_1.

Пусть теперь ранг r_2 конечен. Конечность ранга r_1 очевидна. Но и ранг r также конечен. В самом деле, любой из максимальных абелевых нормальных делителей группы $\mathfrak{G}$ имеет конечный специальный ранг, т. е. является абелевой группой с конечным рациональным рядом. В силу теоремы 4 из ([1]) рациональный ряд группы $\mathfrak{G}$ тоже конечен, что окончательно доказывает теорему.

Из конечности ранга r_1 не следует, вообще говоря, конечности рангов r_2 и r даже для ZA-групп. В этом нас убеждает пример группы с образующими A_i $(i=1, 2, \ldots)$, B и определяющими соотношениями: $[A_1; B]=1$; $[A_i; B]=A_{i-1}$ $(i=2, 3, \ldots)$; $[A_i; A_j]=1$ $(i=1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots)$. Нетрудно видеть, что эта группа обладает верхним центральным рядом длины $\omega+1$ с циклическими факторами. Ее r_1-ранг равен двум, а ранги r и r_2 бесконечны.

Однако в случае групп без кручения с конечной длиной центрального ряда все ранги конечны или бесконечны одновременно, ибо тогда конечность r_1 влечет за собой конечность r_2 (([6]), теорема 2, § 2).

Лемма 1. *В полной ZA-группе $\mathfrak{G}$ без кручения любое конечное множество подгрупп $\mathfrak{B}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с конечными корневыми рядами порождает подгруппу $\mathfrak{B}$ с конечным корневым рядом.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 из ([7]) каждая из подгрупп $\mathfrak{B}_i$, а значит и $\mathfrak{B}$, порождается конечным множеством своих подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Пусть $\mathfrak{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ — подгруппы, изоморфные аддитивной группе рациональных чисел, которые порождают $\mathfrak{B}$. Выберем в каждой из подгрупп $\mathfrak{A}_i$ элемент A_i, отличный от единицы. Пусть $\mathfrak{C}$ — подгруппа с образующими A_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, а $\mathfrak{C}^*$ — ее пополнение в $\mathfrak{G}$. Очевидно, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}^*$ и, по свойству минимальности пополнения (([3]), § 2), $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}^*$. Но $\mathfrak{C}$ обладает конечным рациональным рядом (следствие 2 из теоремы 2).

Тогда, по теореме 1, $\mathfrak{G}^*$ обладает конечным корневым рядом, что и требовалось.

Используя ([8]), можно доказать лемму 1 и без ссылки на работу ([3]).

Нетрудно показать на примере, что лемма 1 неверна для ZA-групп с кручением.

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, элементами которой являются тройки рациональных чисел с законом композиции: $(a_1;\ b_1;\ c_1)\ (a_2;\ b_2;\ c_2) = (a_1 + a_2 + b_1 c_2;\ b_1 + b_2;\ c_1 + c_2)$.

Нетрудно видеть, что это полная ZA-группа без кручения с длиной корневого ряда, равной трем. Она порождается двумя своими подгруппами, изоморфными аддитивной группе рациональных чисел. Фактор-группа группы $\mathfrak{G}$ по некоторой циклической подгруппе ее центра имеет уже бесконечный корневой ряд, но попрежнему порождается двумя своими подгруппами, изоморфными аддитивной группе рациональных чисел.

Теорема 4. *В ZA-группе $\mathfrak{G}$ без кручения конечное множество подгрупп $\mathfrak{A}_i$ с конечными рациональными рядами порождает подгруппу $\mathfrak{A}$ с конечным рациональным рядом.*

Доказательство. Вложим $\mathfrak{G}$ в полную ZA-группу без кручения ([3]). Пополнения $\mathfrak{A}_i^*$ подгрупп $\mathfrak{A}_i$ имеют конечные корневые ряды (теорема 1) и порождают, ввиду леммы 1, подгруппу $\mathfrak{A}^*$ с конечным корневым рядом. Так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^*$, то $\mathfrak{A}$ обладает конечным рациональным рядом, что и требовалось.

Ввиду теоремы 3, отсюда следует также, что в ZA-группе без кручения конечное множество подгрупп конечных r_2-рангов порождают подгруппу с конечным r_2-рангом.

Нетрудно показать, что в произвольной группе $\mathfrak{G}$ конечное множество подгрупп $\mathfrak{A}_i$ конечных r_1-рангов порождают подгруппу $\mathfrak{A}$ конечного r_1-ранга, причем r_1-ранг группы $\mathfrak{A}$ не превышает суммы r_1-рангов подгрупп $\mathfrak{A}_i$.

Объединяя все вышесказанное, получим следующий результат:

Теорема 5. *В ZA-группе без кручения конечное множество подгрупп конечных рангов (в любом из смыслов) порождает подгруппу конечного ранга (в том же смысле).*

Теорема 6. *В полной ZA группе без кручения все члены нижнего центрального ряда (вообще говоря, не доходящего до единицы) являются полными группами.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_\alpha \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_\gamma$ — нижний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$. Предположим, что полнота членов этого ряда доказана для всех $\alpha < \beta$, и будем доказывать полноту $\mathfrak{G}_\beta$.

Если β предельное, то $\mathfrak{G}_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{G}_\alpha$ является полной группой ввиду полноты $\mathfrak{G}_\alpha$ и однозначности извлечения корня в $\mathfrak{G}$ ([3]).

Если β непредельное, то $\mathfrak{G}_\beta$ порождается коммутаторами вида $[A;\ U]$, где $A \in \mathfrak{G}_{\beta-1}$, $U \in \mathfrak{G}$. Если из каждого такого коммутатора в $\mathfrak{G}_\beta$ неограниченно извлекается корень, то $\mathfrak{G}_\beta$ является полной группой. Пусть $\mathfrak{G}_\beta$ неполна, тогда найдется коммутатор $C = [A;\ B]$, где $A \in \mathfrak{G}_{\beta-1}$, $B \in \mathfrak{G}$, такой, что $C \in \mathfrak{G}_\beta$, но корень некоторой степени из C (обозначим его $C^{1/n}$) не принадлежит $\mathfrak{G}_\beta$. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — пополнения циклических подгрупп с образующими A, B, C соответственно. Подгруппа $\mathfrak{D}$, порожденная подгруппами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, обладая конечным корневым рядом (лемма 1), очевидно, нильпотентна и потому, по теореме 3 из ([3]), коммутант $\mathfrak{D}_1$ группы $\mathfrak{D}$ полон.

Ввиду полноты $\mathfrak{D}$ и однозначности извлечения корня в $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$. Но $C \in \mathfrak{D}_1$, тогда и $C^{1/n} \in \mathfrak{D}_1$. Нетрудно видеть, однако, что $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{G}_\beta$ ($\mathfrak{G}_{\beta-1}$ предполагается полной!), т. е. $C^{1/n} \in \mathfrak{G}_\beta$, вопреки предположению. Теорема доказана.

Следствие. В полной ZA-группе без кручения все члены убывающего ряда коммутантов являются полными группами.

Условимся называть K-группой такую группу, которая отлична от своего коммутанта и все ее истинные фактор-группы отличны от своих коммутантов.

Нетрудно видеть, что для K-групп справедливо следующее утверждение, являющееся очевидным обобщением теоремы 2 работы С. Н. Черникова ([4]).

Лемма 2. *Неполная (в смысле С. Н. Черникова) K-группа $\mathfrak{G}$ гомоморфна некоторой конечной абелевой группе.*

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству теоремы 2 из ([4]).

Из леммы 2 непосредственно следует, что K-группа полна тогда и только тогда, когда полна ее фактор-группа по коммутанту (полнота берется в смысле С. Н. Черникова).

Теорема 7. *ZA-группа полна тогда и только тогда, когда полна ее фактор-группа по коммутанту.*

Теорема 8. *Разрешимая группа полна (в смысле С. Н. Черникова) тогда и только тогда, когда полна ее фактор-группа по коммутанту.*

Теоремы 6, 7 и 8 дают обобщение теоремы 3 из ([3]) в различных направлениях.

Поступило
25 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, ДАН, **70**, № 6 (1950). [2] А. И. Мальцев, Матем. сборн., **22** (64): 2, 351 (1948). [3] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 201 (1949). [4] С. Н. Черников, Матем. сборн., **18** (60): 3, 397 (1946). [5] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., **13**, 9 (1949). [6] Н. Н. Мягкова, там же, **13**, № 6 (1949). [7] С. Н. Черников, Матем. сборн., **22** (64): 2, 319 (1948). [8] В. М. Глушков, ДАН, **71**, № 3 (1950).