Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

О СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 VIII 1950)

В настоящей заметке вводится новый класс так называемых сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений порядка $2m$. Для случая одного уравнения порядка $2m$ требование сильной эллиптичности совпадает с обычным требованием эллиптичности. Класс сильно эллиптических систем уравнений является сужением класса эллиптических систем в смысле И. Г. Петровского ([1,2]).

Оказывается, что для однородной задачи типа Дирихле (будем ее называть нулевой краевой задачей, а соответствующие краевые условия — нулевыми краевыми условиями) для неоднородных сильно эллиптических систем уравнений в конечной области G имеют место все основные свойства, связанные с вопросами разрешимости, полуограниченности и дискретности спектра, которые хорошо известны для случая одного эллиптического уравнения второго порядка. Эти свойства (подробные формулировки соответствующих теорем приведены ниже) следующие: 1) нулевая краевая задача для данной сильно эллиптической системы порядка $2m$ $Lu = f$ и нулевая краевая задача сопряженной с ней эллиптической системы $L^*v = g$ образуют фредгольмову пару, т. е. для этих двух уравнений имеют место три теоремы, аналогичные трем известным теоремам Фредгольма; 2) для малых областей нулевая краевая задача для системы $Lu = f$ разрешима, и притом единственным образом, для любой правой части f; 3) сильно эллиптический дифференциальный оператор L, рассматриваемый на функциях u, удовлетворяющих нулевым краевым условиям, является полуограниченным; 4) оператор L при нулевых краевых условиях имеет дискретный спектр, а для регулярных значений λ оператор $L - \lambda E$ (где E — единичный оператор), рассматриваемый на функциях, удовлетворяющих нулевым краевым условиям, имеет вполне непрерывный обратный.

Известно, что эллиптические в общем смысле системы уравнений (определение см. в ([1]) или ([2])) перечисленными свойствами не обладают. А. В. Бицадзе ([3]) привел пример простой эллиптической системы с постоянными коэффициентами, для которой нулевая задача для однородной системы имеет ненулевые решения для сколь угодно малых кругов. Следовательно, для общих эллиптических систем не выполнено свойство 2). Легко показать, что система Бицадзе, рассматриваемая на функциях, удовлетворяющих нулевым граничным условиям, является оператором, не ограниченным ни снизу, ни сверху. Таким образом, для общих эллиптических систем нарушается свойство 3).

Отметим еще, что ни свойство 1), ни свойство 4) для эллиптических в общем смысле систем до сих пор не доказаны даже в случае постоянных коэффициентов.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$L_i u = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k)} a_{ij}^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{2m} u_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{2m}}} + \ldots = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (1)$$

$(i = 1, \ldots, N)$, где суммирование производится по различным системам индексов $(k_1, \ldots, k_{2m})$, принимающим значения от 1 до n; многоточием обозначен произвольный линейный дифференциальный оператор от $u_1, \ldots, u_N$ порядка $\leqslant 2m-1$. Систему (1) можно короче записать в матричном виде

$$Lu = \sum_{(k)} A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{2m}}} + \ldots = f(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ — матрица $\| a_{ij}^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) \|_{i=1,\ldots,N}^{j=1,\ldots,N}$, $u(x)$ — вектор $(u_1(x), \ldots, u_N(x))$, $f(x)$ — вектор $(f_1(x), \ldots, f_N(x))$; многоточием обозначен произвольный оператор порядка $< 2m$.

Представим матрицу $A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц

$$A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) = C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) + K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x), \quad (3)$$

где, очевидно, $C = {}^1/_2 (A + A^*)$ и $K = {}^1/_2 (A - A^*)$ (A^* — матрица, транспонированная (сопряженная) относительно A).

Определение. Система (1) (или (2)) называется *сильно эллиптической в точке* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, если матрица

$$\sum_{(k)} C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{2m}}, \quad (4)$$

где $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ — симметрическая часть матрицы $A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$, положительно определенная для любых действительных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$, не обращающихся одновременно в нуль. На кососимметрические матрицы $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ и на коэффициенты при членах порядка $< 2m$ никаких ограничений не налагается.

Система уравнений (1) называется *сильно эллиптической в области* G *n-мерного пространства*, если она сильно эллиптична в каждой точке $x \in G$.

Очевидно, в случае одного уравнения $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) = 0$, и условие сильной эллиптичности совпадает с обычным условием эллиптичности.

Заметим, что система, сильно эллиптическая в точке x, всегда является эллиптической в точке x в смысле И. Г. Петровского [1,2]. Действительно, легко показать, что из положительной определенности матрицы (4) $(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \neq 0)$ следует, что определитель

$$\left| \sum_{(k)} A^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{2m}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{(k)} [C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x) + K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)] \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_{2m}} \right| \neq 0 \quad (5)$$

при любых кососимметрических матрицах $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$, т. е. система (1) эллиптична в смысле И. Г. Петровского.

Для сильно эллиптической системы (1) ставится следующая нулевая краевая задача: найти в области G n-мерного пространства решение $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ системы (1), удовлетворяющее на границе Γ области G краевым условиям

$$u_i(x)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u_i(x)}{\partial n}\Big|_\Gamma = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u_i(x)}{\partial n^{m-1}}\Big|_\Gamma = 0 \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{6}$$

где n — нормаль к Γ. В случае области G с вырожденной границей, состоящей из конечного числа кусков различных размерностей, на куске размерности $n - s$ требуется обращение в нуль функций $u_i(x)$ и их производных до порядка $m - \left[\frac{s}{2}\right] - 1$ (ср. [4]).

Для сильно эллиптических систем с постоянными симметрическими матрицами $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}$, с произвольными переменными кососимметрическими матрицами $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ и произвольными переменными коэффициентами при производных порядков $< 2m$ (имеющими лишь некоторое число непрерывных частных производных) в любой конечной области G имеют место нижеприведенные теоремы, являющиеся подробными формулировками свойств 1), 2), 3) и 4).

Для достаточно малых по диаметру областей все эти теоремы имеют место и при переменных матрицах $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ (матрицы $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ и коэффициенты при производных порядка $< 2m$ произвольны).

Для „больших“ областей G и переменных матриц $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ нам удалось установить эти теоремы при выполнении условия, которое мы приводим после формулировок теорем (матрицы $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ и коэффициенты при производных порядка $< 2m$ и в этом случае произвольны).

Теорема 1. *Уравнения*

$$Lu = f, \quad L^* v = g, \tag{7}$$

где L — сильно эллиптическая система (2), *L^* — сопряженная к L система, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ и $v = (v_1, \ldots, v_N)$ удовлетворяют нулевым краевым условиям* (6), *$f = (f_1, \ldots, f_N)$ и $g = (g_1, \ldots, g_N)$ — произвольные суммируемые в квадрате в области G функции, образуют фредгольмову пару уравнений, т. е. для них выполнены следующие три теоремы.*

а) Альтернатива. *Или данное неоднородное уравнение $Lu = f$ имеет, и притом единственное, решение $u(x)$, удовлетворяющее условиям* (6) *при всякой суммируемой в квадрате функции $f(x)$, или однородное уравнение $Lu = 0$ имеет по крайней мере одно нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям* (6).

б) *Если для первого уравнения* (7) *имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для второго уравнения* (7). *Как уравнение $Lu = 0$, так и уравнение $L^* v = 0$ имеют конечные числа линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям* (6), *и эти числа одинаковы.*

в) *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения уравнения $Lu = f$ (и, очевидно, должно удовлетворять условиям* (6)) *является ортогональность функции f ко всем решениям однородной сопряженной системы $L^* v = 0$, удовлетворяющим условиям* (6).

Теорема 2. *Пусть система* (1) *сильно эллиптическая в области G. Для каждой точки $x \in G$ существует такая окрестность $V(x)$, что для всякой области $G' \subset V(x)$ нулевая краевая* *задача разрешима, и притом единственным образом, для любой правой части f.*

Отметим, что теорема 2 установлена для общих сильно эллиптических систем без каких-либо ограничений, кроме дифференцируемости коэффициентов.

Теорема 3. *Оператор Lu (см. формулу (2)), рассматриваемый на функциях $u(x)$, удовлетворяющих на Γ условиям (6), полуограничен.*

Теорема 4. *Уравнение*

$$Lu - \lambda u = 0, \tag{8}$$

где $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ удовлетворяет граничным условиям (6) лишь для дискретного множества значений λ, имеет ненулевое решение (согласно теореме 3, все эти значения λ расположены в одной из полуплоскостей комплексной плоскости λ). Для всех остальных значений λ оператор $(L - \lambda E)u$, рассматриваемый на функциях u, удовлетворяющих условиям (6), имеет вполне непрерывный обратный.

Заметим, что из теоремы 4 следует теорема 1, но при доказательстве теоремы 4 мы пользуемся теоремой 1.

В случае произвольной ограниченной области G и переменных симметрических матриц $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ (матрицы $K^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ и коэффициенты при производных порядка $< 2m$ — любые) нами доказано, что теоремы 1, 2, 3 и 4 остаются в силе в том случае, если выполнено приводимое ниже функциональное неравенство, которое гарантирует положительную определенность главной самосопряженной части дифференциального оператора (1).

Для краткости приведем это неравенство для случая систем второго порядка:

$$\int\limits_G \ldots \int \sum_{(k)} \left(C^{(k_1 k_2)}(x) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_{k_1}}, \ \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_{k_2}} \right) dx \geqslant M_1 \int\limits_G \ldots \int \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u^0(x)}{\partial x_k}, \ \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_k} \right) dx, \tag{N}$$

где $u^0(x) = (u_1^0(x), \ldots, u_N^0(x))$ — произвольная дифференцируемая вектор-функция, все компоненты которой обращаются в нуль в некоторой граничной полоске области G, M_1 — постоянная, не зависящая от $u^0(x)$, $C^{(k_1 k_2)}(x)$ — симметрические части матриц $A^{(k_1 k_2)}(x)$, являющихся коэффициентами в главной части системы (2); скалярные произведения под знаками интегралов понимаются как обычные скалярные произведения соответствующих вектор-функций.

Нами доказано что при постоянных матрицах $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}$ выполнение неравенства (N) является необходимым и достаточным условием для сильной эллиптичности системы (1). В случае переменных матриц $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ для произвольных ограниченных областей G нам не удалось, исходя из сильной эллиптичности, установить выполнение неравенства (N). Оказывается, однако, что из неравенства (N) следует сильная эллиптичность системы (1) в каждой точке $x \in G$. Для достаточно малых областей и переменных матриц $C^{(k_1 \ldots k_{2m})}(x)$ из сильной эллиптичности системы следует выполнение неравенства (N).

Поступило
8 VIII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Петровский, Матем. сборн., 5 (47), № 1, 3 (1939). [2] И. Г. Петровский, Усп. матем. наук, 1, в. 3—4, 44 (1946). [3] А. В. Бицадзе, там же, 3, в. 6, 211 (1948). [4] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44), № 3, 465 (1937)