Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. Ф. БОРИСОВ

МНОГООБРАЗИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ С КРАЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 VIII 1950)

В [1] мы сообщили некоторые теоремы о кривых в двумерных многообразиях с краем, являющихся пополнениями многообразий ограниченной кривизны (см. [2]) *. В настоящей заметке мы изложим дальнейшие результаты в этом направлении, касающиеся в основном „разрезывания и склеивания" многообразий ограниченной кривизны. При этом многообразие с краем будем понимать в смысле определения, данного в [1] **, а основные понятия из [2,1] будем в дальнейшем употреблять без ссылок.

1°. В многообразиях ограниченной кривизны существование угла между кривыми L_1 и L_2 эквивалентно существованию предела углов между кратчайшими $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $X \in L_1$, $Y \in L_2$ (O — „вершина" угла) при $X \to O$, $Y \to O$, причем угол между L_1, L_2 всегда равен указанному пределу. Кратчайшие $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ будем называть хордами кривых. В многообразиях с краем связь предела углов между хордами с углом между кривыми оказывается более сложной. Можно построить примеры, в которых предел углов между хордами существует, тогда как угла между кривыми не существует. Тем не менее имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если угол между кривыми L_1 и L_2 существует и равен α, то предел углов между хордами $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ при $X \to O$, $Y \to O$ также существует и равен α.*

Теорема 2. *Если повороты хорд $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ кривых L_1, L_2 при $X \to O$, $Y \to O$ стремятся к нулю, то из существования предела углов между $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ следует существование угла между L_1 и L_2.*

2°. Определение угла между кривыми, имеющееся в [3], в некоторых случаях представляет существенные неудобства по двум причинам: во-первых, требование существования угла накладывает сильное ограничение на рассматриваемые кривые; во-вторых, существование угла между кривыми L_1, L_2, ограничивающими сектор U, зависит от того, определяем ли мы угол чисто внутренним образом по отношению к U (т. е. рассматривая U как „самостоятельное" многообразие с краем) или в „объемлющем пространстве". Чтобы устранить эти затруднения, мы вводим понятие „одностороннего угла" между кривыми, состоящее в следующем.

Пусть кривые L_1 и L_2 ограничивают сектор и пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) из вершины O сектора U исходит кратчайшая, проходящая в U; 2) угол между L_1,

---

* В формулировку теоремы 7 статьи [1] вкралась досадная описка: производная функции $l(s)$ равна не $\cos\alpha(s) + \cos\beta(s)$, а $-(\cos\alpha(s) + \cos\beta(s))$.

** Имеющаяся в этом определении ссылка на [2] формально не вполне точна, так как, говоря о многообразии ограниченной кривизны, мы подразумеваем, что всякое ограниченное множество имеет конечную абсолютную кривизну (см. [2]).

L_2 существует и равен нулю. В первом случае **односторонним углом между** L_1, L_2 **со стороны сектора** U называем точную верхнюю границу (быть может, бесконечную) углов секторов с вершиной O, ограниченных кратчайшими и содержащихся в U. Во втором случае односторонний угол между L_1 и L_2 считаем равным нулю *.

Основываясь на теореме 1, легко показать следующее:

Теорема 3. *Если существует угол сектора, образованного кривыми L_1, L_2, то односторонний угол между L_1, L_2 существует и равен углу этого сектора.*

Пользуясь вместо обычных углов односторонними, мы получаем определение поворота кривой, не зависящее от существования направлений в ее концах. Вместе с тем, самый факт существования направлений у кривой в одном важном случае удается вывести из условий, наложенных на ее поворот в целом.

Теорема 4. *Если кривая имеет поворот ограниченной вариации (см. ([4])), то она в каждой точке имеет направление.*

3°. Пусть E — замкнутое множество в многообразии ограниченной кривизны F, гомеоморфное поверхности с краем, и пусть любые две точки из E можно соединить в E спрямляемой кривой. Тогда в E индуцируется метрика ρ_E, в которой расстояние определяется как точная нижняя граница длин кривых, соединяющих данные точки. Если топология, задаваемая в множестве E метрикой ρ_E, совпадает с его естественной топологией (в том, что последнее требование не вытекает из предыдущих, можно убедиться на примерах), то метрическое пространство E будем называть **куском многообразия** F. Имеет место следующая теорема, из которой следует сохранение длин кривых при „вырезании кусков".

Теорема 5. *Для всякой спрямляемой кривой L в многообразии ограниченной кривизны, имеющей полуокрестность U_L, существует последовательность геодезических ломаных $R_n \subset U_L$, $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, длины которых сходятся к длине L.*

Относительно сохранения углов при вырезании кусков имеет место теорема 6.

Теорема 6. *Пусть кривые L_1, L_2, входящие в границу куска E многообразия F, ограничивают сектор $U \subset E \subset F$ ** и пусть между L_1, L_2 существует односторонний угол со стороны U, равный α. Тогда односторонний угол между L_1* и *L_2 в куске E существует и равен α.*

Основываясь на теореме 6, легко получить необходимое условие погружаемости многообразия с краем в многообразие ограниченной кривизны.

Теорема 7. *Пусть E — многообразие с краем и пусть M — любая точка края K. Пусть α_M — односторонний угол между дугами края K, исходящими из M (очевидно, α_M всегда существует, хотя может быть и бесконечным). Для того чтобы E было изометрично куску многообразия ограниченной кривизны, необходимо, чтобы для всякой конечной дуги $L \subset K$ выполнялось условие:*

$$\sum_{M\in L,\, \alpha_M > 2\pi} (\alpha_M - 2\pi) < \infty.$$

---

* Можно показать, что если при этом выполнено и первое условие, то угол, полученный первым способом, также равен нулю.

** Не опасаясь недоразумений, мы обозначаем через E не только кусок, но и соответствующее подпространство в F.

Для поворотов кривых, определенных с помощью односторонних углов, также имеет место инвариантность относительно вырезания кусков.

Теорема 8. *Пусть кривая L, входящая в границу куска E многообразия F, имеет поворот φ со стороны полуокрестности, содержащейся в E. Тогда поворот кривой L, измеренный в E, существует и равен φ.*

4°. Пусть даны многообразия с краем $E_1, E_2, \ldots, E_n$ и указан способ отождествления их краев (закон склеивания), в результате которого получается многообразие $F^{(T)}$. Если $F^{(T)}$ путем введения метрики ρ можно превратить в многообразие ограниченной кривизны так, что метрика, индуцированная в подпространствах, соответствующих $E_1, E_2, \ldots, E_n$, совпадает с метрикой в $E_1, E_2, \ldots, E_n$, то будем говорить, что многообразие ограниченной кривизны F склеено из $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Пусть $\overset{\frown}{AB}$ — дуга, вдоль которой происходит склеивание многообразий с краем E_i и E_j. Назовем последовательность ломаных $L_n^{(i)} \subset E_i$ нормальной, если выполнены такие условия: 1) все $L_n^{(i)}$ не имеют кратных точек и проходят внутри E_i; 2) $L_n^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \overset{\frown}{AB}$; 3) пусть некоторое множество H, гомеоморфное замкнутому кругу, разбивается дугой ломаной $L_n^{(i)}$ на два множества H_1, H_2 того же вида. Ломаная $L_n^{(i)}$ имеет две полуокрестности, одна из которых прилегает к дуге $\overset{\frown}{AB}$. Пусть множество H_2 лежит по ту же сторону от $L_n^{(i)}$, что и полуокрестность, не прилегающая к $\overset{\frown}{AB}$. Тогда, если в $H = H_1 + H_2$ и H_2 индуцированы метрики ρ_H и ρ_{H_2}, то для любой пары точек X, Y из H_2 $\rho_{H_2}(XY) - \rho_H(XY) < \varepsilon_n$, причем $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Рассмотрим наряду с $\{L_n^{(i)}\}$ нормальную последовательность $\{L_n^{(j)}\}$ ломаных $L_n^{(j)} \subset \subset E_j$, сходящихся к $\overset{\frown}{AB}$. Будем говорить, что последовательность разверток $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$ * связана с дугой $\overset{\frown}{AB}$, если выполнены следующие требования: 1) каждая развертка $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$ гомеоморфна кругу и ограничена ломаными $\overline{L}_n^{(i)}$, $\overline{L}_n^{(j)}$, у которых длины сторон совпадают с длинами звеньев ломаных $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$, а углы равны углам этих ломаных со стороны полуокрестностей, прилегающих к $\overset{\frown}{AB}$ (на углы между $\overline{L}_n^{(i)}$, $\overline{L}_n^{(j)}$ в их концах не накладываем никакого ограничения); 2) пусть на $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$ введен параметр t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем значение $t = 0$ отвечает концам $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$, близким к A. Положим $\rho(t) = \inf\limits_{M \in \overset{\frown}{AB}} [\rho_{E_i}(M_i(t)M) + \rho_{E_j}(M_i(t)M)]$,

где $M_i(t)$, $M_j(t)$ — точки ломаных $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$, отвечающие параметру t. Перенося выбранную параметризацию на ломаные $\overline{L}_n^{(i)}$, $\overline{L}_n^{(j)}$, положим

$$b_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} [\rho(t) + \rho_{P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}}(\overline{M}_i(t)\overline{M}_j(t))],$$

где $\rho_{P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}}$ — метрика в развертке $P_A^{(n)}$, а $M_i(t)$, $M_j(t)$ — точки на $\overline{L}_n^{(i)}$, $\overline{L}_n^{(j)}$, отвечающие параметру t. Обозначая через b_n точную нижнюю границу чисел b_n при всевозможных параметризациях ломаных

* Разверткой мы называем метрическое пространство с внутренней метрикой, которое можно разбить на конечное число частей, изометричных плоским треугольникам.

$L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$, мы требуем, чтобы для разверток $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$ выполнялось соотношение $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Наглядный смысл этого требования состоит в том, что развертки $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$ становятся бесконечно узкими, причем точки на $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$ считаются близкими только при условии, что на $\overset{\frown}{AB}$ существует точка M, достаточно близкая к соответствующим точкам на $L_n^{(i)}$, $L_n^{(j)}$.

Назовем условной кривизной $\Omega_{усл}(\overset{\frown}{AB})$ дуги $\overset{\frown}{AB}$ точную нижнюю границу величин $\overline{\lim}\, \Omega\,(P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)})$ для всевозможных последовательностей разверток $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$, связанных с дугой $\overset{\frown}{AB}$ *.

Теорема 9. *Для того чтобы при данном законе склеивания многообразий с краем $E_1, \ldots, E_n$ существовало многообразие F ограниченной кривизны, склеенное из $E_1, \ldots, E_n$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой дуги $\overset{\frown}{AB}$, вдоль которой происходит склеивание, условная кривизна была конечна.*

Из теоремы 9 легко выводится следующая теорема о склеивании, доказанная А. Д. Александровым в предположении, что склеиваемые многообразия с краем суть куски многообразий ограниченной кривизны.

Теорема 10. *Если каждое из многообразий с краем ограничено кривой с поворотом ограниченной вариации, то для их склеиваемости необходимо и достаточно, чтобы длины отождествляемых дуг были равны.*

Для случая склеивания многообразий с метрикой положительной кривизны (см. ([4])) теорему 9 нужно видоизменить следующим образом.

Теорема 11. *Для того чтобы из многообразий с краем $E_1, \ldots, E_n$ можно было склеить многообразие с метрикой положительной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $E_1, \ldots, E_n$ имели внутри метрику положительной кривизны и чтобы для всякой дуги $\overset{\frown}{AB}$, вдоль которой происходит склеивание, нашлась последовательность разверток $P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}$, связанных с $\overset{\frown}{AB}$ и таких, что $\lim \omega^-\,(P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}) = 0$** и $\lim \Omega\,(P_{\overset{\frown}{AB}}^{(n)}) < \infty$.*

Из теоремы 11 легко вытекает теорема 12.

Теорема 12. *Пусть многообразие с краем E гомеоморфно кругу и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\omega^-(\overline{E}) = 0$ ($\overline{E}$ — внутренность E); 2) $\omega^+(\overline{E}) \leqslant 2\pi$; 3) край K пространства E спрямляем; 4) для любой дуги $\overset{\frown}{AB} \subset K$, имеющей поворот $\varphi(\overset{\frown}{AB})$, $\varphi(\overset{\frown}{AB}) + \varphi(A) + \varphi(B) \geqslant -\pi + \delta$, $\delta > 0$, где $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ — повороты в точках A, B. Тогда E изометрично замкнутой области на бесконечной выпуклой поверхности.*

Поступило
6 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Ф. Борисов, ДАН, 64, № 1 (1949). [2] А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948). [3] А. Д. Александров, ДАН, 63, № 4 (1948). [4] А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948.

* Символ Ω обозначает абсолютную кривизну (см. ([2])).

** ω^- — отрицательная часть кривизны ([2]).