Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 4

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Н. Н. БОГОЛЮБОВ, В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ
и Б. В. МЕДВЕДЕВ

К ИНВАРИАНТНОМУ ПОСТРОЕНИЮ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Неоднократные попытки построить квантовую теорию поля, релятивистская инвариантность которой не была бы чисто иллюзорной и в которой не приходилось бы избегать физически абсурдных следствий с помощью так называемого „вычитательного формализма", не увенчались до сих пор успехом. Это побудило нас предпринять в настоящей работе подробное исследование условий, налагаемых на любую квантовую теорию поля одним лишь требованием релятивистской инвариантности. Запишем эти условия в виде известных перестановочных соотношений:

$$\text{а)}\ [HP_\alpha]=0,\quad \text{б)}\ [P_\alpha P_\beta]=0,\quad \text{в)}\ [I_\alpha H]=iP_\alpha,$$
$$\text{г)}\ [I_\alpha P_\beta]=i\delta_{\alpha\beta}H,\quad \text{д)}\ [I_\alpha I_\beta]=-ie_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma,\quad \text{е)}\ [I_\alpha M_\beta]=ie_{\alpha\beta\gamma}I_\gamma, \tag{1}$$
$$\text{ж)}\ [M_\alpha M_\beta]=ie_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma,\quad \text{з)}\ [P_\alpha M_\beta]=ie_{\alpha\beta\gamma}P_\gamma,\quad \text{и)}\ [M_\alpha H]=0\quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3).$$

Здесь H, P_α, M_β и I_γ — операторы, соответственно, энергии, импульса, момента и временной части 4-момента ($\hbar=c=1$).

Легко видеть, что не все соотношения (1) независимы. Так, например, из соотношений (1а) — (1е) все остальные вытекают как следствие. Поэтому мы будем рассматривать только соотношения первой группы.

Соотношения (1) были недавно исследованы Дираком [1] в случае классической теории. Мы рассмотрим их в рамках метода вторичного квантования. Введем обычные операторы a^*_μ, a_λ, подчиняющиеся правилам перестановки:

$$a_\lambda a^*_\mu - a^*_\mu a_\lambda = \delta(\mu-\lambda) \tag{2}$$

(для простоты мы ограничиваемся пока только случаем статистики Бозе). Индекс μ представляет собой совокупность значков m и M, первый из которых является обычным волновым вектором, а второй характеризует сорт поля, заряд, номер компоненты и т. д. В тех же случаях, когда M принимает дискретные значения, под символом $\int dM(\cdots)$ следует понимать соответствующую сумму. Условимся обозначать:

$$\int (dm)_3 dM(\cdots)=\int d\mu(\cdots),\quad \int d\mu_1\cdots d\mu_m(\cdots)=\int dm\,(\cdots), \tag{3}$$

$$\prod_{i=1}^{m} a^*_{\mu_i}=\prod\nolimits^*_m,\quad \prod_{k=1}^{l} a_{\lambda_k}=\prod\nolimits_l. \tag{4}$$

Мы будем также пользоваться символами ( ) и [ ] для обозначения, соответственно, симметрирования и альтернирования по стоящим в скобках индексам.

Будем считать, что любой встречающийся в теории оператор можно выразить через a^*_μ и a_λ и, следовательно, записать в виде:

$$F=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int dm\,dl\,f_{ml}(\mu_1,\ldots,\mu_m;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_l)\prod\nolimits^*_m\prod\nolimits_l, \tag{5}$$

где функции $f_{ml}(\mu_1,\ldots,\mu_m;\ \lambda_1,\ldots,\lambda_l)=f_{ml}(\mu;\ \lambda)$ симметричны относительно перестановок аргументов внутри каждой группы. Можно показать, что коммутатор двух операторов F и G типа (5) имеет вид:

$$FG-GF=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\int dn\,dt\,K_{nt}(\nu_1,\ldots,\nu_n;\ \tau_1,\ldots,\tau_t)\int\prod\nolimits^*_n\prod\nolimits_t, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}K_{nt}(\nu;\tau)=\sum_{s=1}^{\infty}\int ds\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{t}\frac{(n+s-m)!\,(t+s-l)!}{(n-m)!\,(t-l)!\,s!}\times\\ \times\{f_{m,\,t+s-l}(\nu_1,\ldots,\nu_m;\ \tau_1,\ldots,\tau_{t-l},\ \sigma_1,\ldots,\sigma_s)\times\\ \times g_{n+s-m,\,l}\times(\nu_{m+1},\ldots,\nu_n,\ \sigma_1,\ldots,\sigma_s;\ \tau_{t-l+1},\ldots,\tau_t)-\\ -g_{m,\,t+s-l}(\nu_1,\ldots,\nu_m;\ \tau_1,\ldots,\tau_{t-l},\ \sigma_1,\ldots,\sigma_s)\times\\ \times f_{n+s-m,\,l}(\nu_{m+1},\ldots,\nu_n,\ \sigma_1,\ldots,\sigma_s;\ \tau_{t-l+1},\ldots,\tau_t)\}.\end{aligned} \tag{7}$$

В соответствии со сказанным, напишем операторы P_α, H, I_β в виде

$$P_\alpha=\int d\mu\,d\lambda\,\delta(\mu-\lambda)\,p_\alpha(\mu)\,a^*_\mu a_\lambda, \tag{8а}$$

$$H=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int dm\,dl\,f_{ml}(\mu;\ \lambda)\prod\nolimits^*_m\prod\nolimits_l, \tag{8б}$$

$$I_\beta=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int dm\,dl\,I^\beta_{ml}(\mu;\ \lambda)\prod\nolimits^*_m\prod\nolimits_l, \tag{8в}$$

где $p_\alpha(\mu)=E(M)\,m_\alpha$, а $E(M)=\pm 1$ в соответствии со знаком заряда.

Из соотношений (1а) и (1г) без труда получаем:

$$f_{ml}(\mu;\ \lambda)=\delta\left(\sum_{i=1}^{m}p(\mu_i)-\sum_{k=1}^{l}p(\lambda_k)\right)\varphi_{ml}(\mu;\ \lambda), \tag{9}$$

$$I^\beta_{ml}(\mu;\ \lambda)=-i\delta'_\beta\left(\sum_{i=1}^{m}p(\mu_i)-\sum_{k=1}^{l}p(\lambda_k)\right)\varphi_{ml}(\mu;\ \lambda) \tag{10}$$

(штрих означает дифференцирование по всему аргументу).

Из (1 в) следует, что, в силу (7), (8), (9) и (10):

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t} p(\tau_k)\right)\psi^{\alpha}_{(n)\,(t)}(\nu;\,\tau)=\delta_{n,\,1}\delta_{t,\,1}\,E(N)\,\delta(\nu-\tau)\,n_{\alpha},$$

$$\psi^{\alpha}_{nt}(\nu;\,\tau)=\sum_{s=1}^{\infty}\int ds\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{t}\frac{(n+s-m)!\,(t+s-l)!}{(n-m)!\,(t-l)!\,s!}\,\delta(s^{*}-s_s)\,\times \tag{11}$$

$$\times\,\frac{1}{E(S_s)}\,\frac{1}{\partial\,(s_s)_{\alpha}}\,[\varphi_{m,\,t+s-l}(\nu;\,\tau,\,\sigma)\,\varphi_{n+s-m,\,l}],$$

где

$$s^{*}=\frac{1}{E(S_s)}\left\{\sum_{i=1}^{m} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t-l} p(\tau_k)-\sum_{j=1}^{s-1} p(\sigma_j)\right\}. \tag{12}$$

На основании (1 д), (8 в) и (10) мы имеем, учитывая (7) и (11):

$$M_{\gamma}=ie_{\alpha\beta\gamma}\left\{\int d\mu\,d\lambda\,\delta'_{[\beta}(p(\mu)-p(\lambda))\,m_{\alpha]}\,E(M)\,a^{*}_{\mu}a_{\lambda}\,+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int dm\int dl\,\delta\left(\sum_{i=1}^{m} p(\mu_i)-\sum_{k=1}^{l} p(\lambda_k)\right)h^{[\alpha\beta]}_{ml}(\mu;\,\lambda)\prod\nolimits^{*}_{m}\prod\nolimits_{l}\right\}, \tag{13}$$

где

$$h^{\alpha\beta}_{ml}(\mu;\,\lambda)=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial}{\partial\,(l_k)_{\beta}}\,[\psi^{\alpha}_{ml}(\mu;\,\lambda)]\,\frac{1}{E(L_k)}\,. \tag{14}$$

Наконец, соотношение (1е) дает:

$$2\sum_{s=1}^{\infty}\int ds\sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{t}\frac{(n+s-m)!\,(t+s-l)!}{(n-m)!\,(t-l)!\,s!}\left\{\left[\delta(s^{*}-s_s)\frac{\partial}{\partial\,(s_s)_{\gamma}}(\varphi_{m,\,t+s-l}\psi^{[\alpha}_{n+s-m,\,l})\,+\right.\right.$$

$$+\,\delta(s_s-s^{**})\,\frac{1}{\partial\,(s_s)_{\gamma}}(\varphi_{n+s-m,\,l}\,\psi^{[\alpha}_{m,\,t+s-l})\Big]\,\delta_{\beta]}\left(\sum_{i=1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t} p(\tau_k)\right)-$$

$$-\,\frac{1}{E(S_s)}\,[\delta(s_s-s^{**})\,\varphi_{n+s-m,\,l}\psi^{[\alpha}_{m,\,t+s-l}-\delta(s^{*}-s_s)\,\varphi_{m,\,t+s-l}\psi^{[\alpha}_{n+s-m,\,l}]\,\times$$

$$\times\,\delta''_{\beta]\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t} p(\tau_k)\right)=\delta_{\beta\gamma}\,\delta'_{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t} p(\tau_k)\right)\varphi_{nt}(\nu;\,\tau)\,-$$

$$-\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta'_{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{k=1}^{t} p(\tau_k)\right)\varphi_{nt}(\nu;\,\tau), \tag{15}$$

где

$$s^{**}=\frac{1}{E(S_s)}\left\{\sum_{k=t-l+1}^{t} p(\tau_k)-\sum_{i=m+1}^{n} p(\nu_i)-\sum_{j=1}^{s-1} p(\sigma_j)\right\}. \tag{16}$$

Решения уравнений (11) и (15) дают все возможные в релятивистски инвариантной теории формы гамильтонианов. Основную роль играет уравнение (11), так как именно из него определяются значения $\varphi_{ml}(\mu;\,\lambda)$ на особой поверхности $\sum_{i=1}^{m} p(\mu_i) = \sum_{k=1}^{l} p(\lambda_k)$, фигурирующие в гамильтониане. Уравнение (11) легко решается в общем виде только для свободных полей, когда все функции $\varphi_{ml}(\mu;\,\lambda) = 0$, кроме $\varphi_{11}(\mu;\,\lambda)$. В этом случае гамильтониан легко диагонализовать по большому индексу, и мы, как и следовало ожидать, получаем:

$$\varphi_{11}(\mu;\,\lambda) = \sqrt{p^2(\mu) + \varkappa_0^2(M)} + [p_\alpha(\mu) - p_\alpha(\lambda)]\, F_{11}^{\alpha}(\mu;\,\lambda), \tag{17}$$

где $\varkappa_0^2(M)$ — постоянная интегрирования. Из условия эрмитовости H следует, что $\varkappa_0^2 > 0$, как и должно быть. Функция $F_{11}^{\alpha}(\mu;\,\lambda)$ определяется из (15).

В общем случае (11) имеет частное решение

$$\varphi_{ml} = \exp\left\{i\sum_{j=1}^{m} g_1(\mu_j) - i\sum_{k=1}^{l} g_1(\lambda_k) + i g_2\left(\sum_{j=1}^{m} p(\mu_j) - \sum_{k=1}^{l} p(\lambda_k)\right)\right\} + \left[\sum_{j=1}^{m} p_\beta(\mu_j) - \sum_{k=1}^{l} p_\beta(\lambda_k)\right] \times$$
$$\times \left\{C_\beta + \left[\sum_{j=1}^{m} p_\alpha(\mu_j) - \sum_{k=1}^{l} p_\alpha(\lambda_k)\right] F_{ml}^{\alpha\beta}(\mu;\,\lambda)\right\} \quad (m,\ l \neq 1), \tag{18}$$

$$\varphi_{11}(\mu;\,\lambda) = \sqrt{p^2(\mu) + \varkappa_0^2(M)}\left\{1 + [p_\alpha(\mu) - p_\alpha(\lambda)]\left[\frac{\partial g_1(\mu)}{\partial p_\alpha(\mu)} + (g_2'(0))_\alpha\right]\right\}.$$

Здесь g_1 и g_2 — произвольные вещественные функции, C_β — произвольная постоянная. Функции $F_{ml}^{\alpha\beta}$ определяются из (15)*. Общее решение (11) для случая взаимодействующих полей представляет большие трудности. Однако оно пока и не требуется, так как теория еще слишком обща. В самом деле, ведь до сих пор мы даже не ввели понятия координат**, и сколь угодно „размазанное“ взаимодействие возможно так же как и „точечное“. Но условие ослабления корреляции необходимо сформулировать в любой теории, и оно накладывает новые, весьма существенные ограничения на функции φ_{ml}, мы надеемся вернуться к нему впоследствии. Отметим в заключение, что для фермиевских полей ход рассуждений остается прежним, только вычисления несколько усложняются из-за антисимметрии функций φ_{ml}.

Поступило
11 VIII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys., 21, 392 (1949). [2] Hartland S. Snyder, Phys. Rev., 73, 524 (1948).

---

* Для случая „тройного“ гамильтониана, когда отличны от нуля только φ_{11}, φ_{12} и φ_{21}, аналогичное решение было (без указания метода) сообщено Снайдером ([2]), в заметке которого, повидимому, вследствие типографской ошибки, отсутствует множитель i в показателе.

** Поэтому развитый аппарат может оказаться полезным для исследования схем квантованного пространства — времени.