

В. В. КАЗАКЕВИЧ

МНОГОКРАТНЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОСТЕЙШИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ  
МОДЕЛИ ЧАСОВ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 14 VIII 1950)

1. В настоящем сообщении рассматривается класс динамических систем, движения в которых могут быть описаны подстановками дифференциальных уравнений\*. К указанному классу относятся многие типы часов и спусковых регуляторов, а также все типы систем автоматического регулирования, в которых имеются элементы с гистерезисными свойствами — устройства с электромагнитным реле и устройства, в которых действуют силы сухого трения или люфты, вызывающие гистерезисные петли в характеристиках элементов регулятора и т. д. Здесь мы будем рассматривать системы, описываемые подстановками дифференциальных уравнений 2-го порядка.

2. Пусть дано уравнение

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}), \quad (1)$$

в котором  $F(x, \dot{x}) = f_i(x, \dot{x})$  в области  $G_i(x, \dot{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), причем каждая из областей  $G_i$  не заполняет всей плоскости  $x, \dot{x}$  и каждая из них перекрывает не менее, чем одной из остальных областей. Уравнение (1) можно записать в виде совокупности уравнений

$$\ddot{x} = f_i(x, \dot{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Пусть функции  $f_i$  в областях  $G_i$  непрерывны и удовлетворяют условиям Липшица по  $x$  и  $\dot{x}$ . Будем считать, что по меньшей мере для одной из функций  $f_i$  вид ее или область определения отличны от таковых для других функций  $f_i$ .

Рассмотрим теперь динамическую систему, движения в которой поочередно описываются уравнениями (2). Пусть в начальный момент движение описывается  $i$ -м уравнением, причем для подобласти  $Q_i$  начальных значений  $x_{0i}, \dot{x}_{0i}$  через некоторый промежуток времени, зависящий от  $x_{0i}, \dot{x}_{0i}$ , точка  $(x, \dot{x})$  выходит из области  $G_i$  (через участок границы этой области, являющийся дугой без контакта семейства траекторий  $i$ -го уравнения) и пусть дальнейшее движение требует для своего описания  $k$ -го уравнения. Далее, для области  $Q_k$  начальных значений  $x_{0k}, \dot{x}_{0k}$  через некоторый промежуток времени, зависящий от  $x_{0k}, \dot{x}_{0k}$ , движение начинает описываться  $p$ -м из уравнений (2), затем  $q$ -м и т. д.

\* Мы рассматриваем уравнения, разрешенные относительно старшей производной.

Характер движений в рассматриваемой динамической системе определяется, с одной стороны, видом и областями существования функций  $f_i$ , а с другой,—порядком замены уравнений совокупности (2). Не рассматривая общего случая, ограничимся предположением, что замена дифференциальных уравнений динамической системы при всех рассматриваемых начальных значениях циклическая и определяется циклической подстановкой  $t$  функций  $f_i$ :  $T = (f_{\beta_1}, f_{\beta_2}, \dots, f_{\beta_m})$ , где  $\beta$ —числа последовательности  $1, 2, \dots, m$ . Системы подобного типа будут называться многократными динамическими системами кратности  $m$ .

Рассмотрим вопрос о фазовом пространстве многократных систем. Адекватное фазовое пространство, дающее взаимно-однозначное соответствие между точками фазового пространства и состояниями системы, легко построить следующим образом. Отобразим каждое из уравнений (2) на свой кусок фазовой плоскости, скрепим получившиеся  $m$  кусков фазовых плоскостей в соответствии с подстановкой  $T$  вдоль тех участков границ областей  $G$ , которые являются дугами без контакта для соответствующих семейств траекторий и через которые изображающие точки выходят за границы областей, и доопределим систему уравнений (2) на линии скрепления. Такое доопределение можно сделать, условившись, например, что поведение изображающей точки на линии разветвления определяется тем куском фазовой плоскости, на который переходит изображающая точка. Таким образом, начальные условия в многократной системе 2-го порядка должны быть заданы тремя числами: значениями в начальный момент координаты  $x$ , скорости  $\dot{x}$  и номера листа многолистной фазовой поверхности.

При количественном исследовании многократных систем целесообразно применение метода точечных преобразований, причем выбор отрезков или дуг без контакта, порождающих функции соответствия, имеет смысл производить в связи с конкретными особенностями задачи. В некоторых случаях целесообразно ввести специальный вид функций соответствия, при котором устанавливается соответствие между границами каждого из квадрантов многолистной поверхности. Нумеруя квадранты  $m$ -листной поверхности (от 1-го до  $4m$ -го) по направлению часовой стрелки, будем обозначать величину полуамплитуд через  $a$ , а соответствующие значения скорости прохождения через положение равновесия через  $v_i(a)$  ( $i = 1, 2, \dots, 4m$ ). Тогда процесс установления вокруг начала координат может быть задан циклической подстановкой  $4m$  функций  $f_i$ :

$$T_1 = (v_1, v_2, \dots, v_{4m}). \quad (3)$$

Если задано начальное значение  $a_1$ , то процесс установления можно определить из последовательности уравнений:

$$\begin{aligned} v_1(a_1) &= v_2(a_2), \quad v_3(a_2) = v_4(a_3), \dots, v_{4m-1}(a_{2m}) = v_{4m}(a_{2m+1}), \\ v_1(a_{2m+1}) &= v_2(a_{2m+2}), \quad v_3(a_{2m+2}) = v_4(a_{2m+3}), \dots \\ &\dots, v_{4m-1}(a_{4m}) = v_{4m}(a_{4m+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

\* \* \* \* \*

Периодические движения могут быть выделены следующим образом: наложим на систему условие периодичности  $a_1 = a_{2m+1}$ . Тогда число периодических движений будет определяться числом действительных решений системы  $2m$  уравнений с  $2m$  неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}$ :

$$v_1(\alpha_1) = v_2(\alpha_2), \quad v_3(\alpha_2) = v_4(\alpha_3), \dots, v_{4m-1}(\alpha_{2m}) = v_{4m}(\alpha_1), \quad (5)$$

причем значения корней в каждом решении определяют величину

полуамплитуд соответствующего периодического движения. Очевидно, что  $2m$  корней каждого  $s$ -го решения  $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \dots, \alpha_{2m,s}$  образуют циклическую подстановку  $T_2 = (\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \dots, \alpha_{2m,s})$ . Пусть найден ряд последовательных значений

$$a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1}, \dots, a_{4m-1}, a_{4m}, a_{4m+1}, \dots \quad (6)$$

Если имеются устойчивые периодические движения, которым на многолистной поверхности соответствуют замкнутые траектории, охватывающие начало координат, и начальное значение  $a_1$  взято в области притяжения какого-нибудь из них, то ряд (6) будет периодически сходящимся (в смысле Кенигса <sup>(2)</sup>) с периодом сходимости  $2m$  \*.

3. Как было сказано выше, многие типы часов могут рассматриваться как многократные динамические системы. Рассмотрение часов до-галилеева типа (спусковых регуляторов без собственного периода), рассмотрение обычных часов Галилея — Гюйгенса (спусковых регуляторов с собственным периодом) как многократных систем дает адекватную динамическую модель, позволяющую представить простыми математическими средствами с хорошим приближением движение в этих системах. В качестве примера мы рассмотрим модель часов до-галилеева типа (рис. 1).

Механизм образован ходовым колесом  $I$ , оснащенным зубцами и анкером 2. На ходовое колесо действует момент  $M$  заводной пружины или груза. При вращении его (колеса) зубы встречают поочередно правую (3) и левую (4) палетты анкера 2. Положение анкера будем определять углом  $x = \phi$  между полярной осью  $I$  с полюсом  $O$  и прямой, соединяющей ось вращения анкера и вершину правой палетты, считая угол положительным, если он отложен по часовой стрелке. Нетрудно видеть, что энергия передается анкеру на угол импульса  $\beta$ . Введем обозначения:  $I$  — момент инерции анкера,  $M$  и  $M_{tr}$  — соответственно моменты пружины и трения, приведенные к анкеру. Предположим, что: а) абсолютные значения  $M$  и  $M_{tr}$  не зависят от положения и скорости; б) момент инерции ходового колеса пренебрежимо мал сравнительно с  $I$ . В этих предположениях уравнения движения анкера при работе зуба соответственно на правой и левой палеттах имеют вид:

$$\ddot{x} = f_1(x, \dot{x}), \quad (7)$$

$$\ddot{x} = f_2(x, \dot{x}), \quad (8)$$

где  $f_1 = -M''$  при  $\dot{x} > 0$ ,  $f_1 = +M'$  при  $\dot{x} < 0$ ;  $f_2 = +M''$  при  $\dot{x} < 0$ ;  $f_2 = -M'$  при  $\dot{x} > 0$ ;  $M' = |M| - |M_{tr}|$ ,  $M'' = |M| + |M_{tr}|$ .

Легко видеть, что записать уравнения (7) и (8) в виде одного уравнения  $\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x})$ , где  $\varphi(x, \dot{x})$  — однозначная функция своих аргу-

\* В этой связи см. работу В. Бовшеверова <sup>(1)</sup>, который рассмотрел некоторый класс распределенных автоколебательных систем с помощью метода Кенигса — Лемеря и показал для этого класса задач существование периодических движений различных индексов.

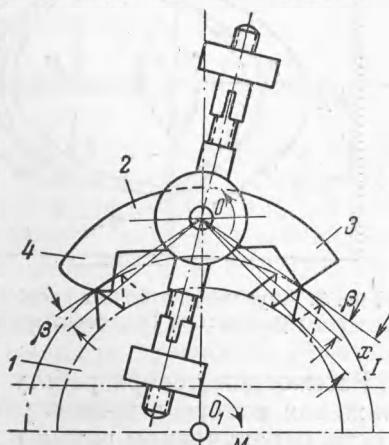


Рис. 1

ментов, невозможно, так как в пределах угла импульса  $\beta$  правые части в (7) и (8) отличны друг от друга. Все движения регулятора описываются циклической подстановкой дифференциальных уравнений (7) и (8).

Рассмотрим фазовую поверхность системы. Пусть зуб контактирует с правой палеттой. Соприкосновение имеет место в пределах угла  $0 \leq x \leq \alpha$  (при  $x < 0$  зуб покидает правую палетту, а на смену ему другой зуб начинает контактировать с левой палеттой, угол же больший  $\alpha$  не допускается конструкцией хода). В то же время угловые скорости ничем не ограничены. Следовательно, все возможные движения анкера при работе на правой палетте отображаются на куске фазовой плоскости, ограниченном осью ординат слева и прямой  $x = \alpha$  справа. Все траектории на построенном куске фазовой плоскости в силу уравнения (7) описываются уравнением

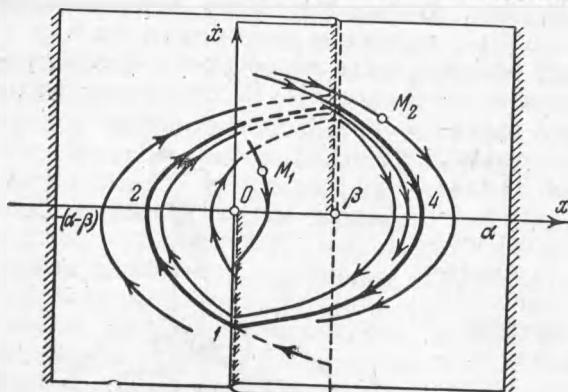


Рис. 2. Двухлистная фазовая поверхность спускового регулятора без собственного периода

Рассмотрим теперь работу зуба на левой палетте. Все возможные движения анкера в этом случае отображаются на куске фазовой плоскости, ограниченном двумя прямыми:  $x = -(\alpha - \beta)$  и  $x = \beta$ . Траектории в силу уравнения (8) описываются уравнением

$$\dot{x} = -\sqrt{2M''(b+x)}, \quad \dot{x} = +\sqrt{2M'(b+x)}, \quad (8a)$$

где  $b$  — абсолютное значение  $x < 0$  при  $\dot{x} = 0$ .

Для построения фазовой поверхности системы наложим куски фазовых плоскостей обеих палетт, совместив их координатные оси. Далее скрепим эти куски между собой вдоль отрицательной полуоси ординат и вдоль положительной полуправой  $x = \beta$  (линии скрепления очерчены штрих-линией). Построенная двухлистная фазовая поверхность полностью отображает все движения системы. Из рис. 2 достаточно ясен процесс установления. Фазовые траектории и изнутри и снаружи приближаются к предельному циклу  $1-2-3-4-1$  с периодом

$$T = 2\sqrt{1/\beta} \left[ \sqrt{\frac{|M| + |M_{tp}|}{|M_{tp}|(|M| - |M_{tp}|)}} + \sqrt{\frac{|M| - |M_{tp}|}{|M_{tp}|(|M| + |M_{tp}|)}} \right] \text{ и полу-амплитудами } a = \beta \frac{|M| + |M_{tp}|}{2|M_{tp}|}, \quad b = \beta \frac{|M| - |M_{tp}|}{2|M_{tp}|} \quad (\text{на рис. 2 куски траекторий, прикрытые сверху фазовой плоскостью правой палетты, изображены штрих-линией*}).$$

Поступило  
29 XI 1949

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> В. Бовшеверов, ЖТФ, 6, в. 9 (1936). <sup>2</sup> M. Koenigs, Bull. de Darboux, 7 (1883).

\* Если хотя бы один из  $z$  зубцов отличен от других, то движения в системе будут описываться циклической подстановкой  $2z$  уравнений вида (8) и (9).