Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ШРЕЙДЕР

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ — СТИЛЬТЬЕСА ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 VIII 1950)

Заметка посвящена изложению результатов, относящихся к теории преобразования Фурье — Стильтьеса функций с ограниченным изменением. Речь идет о функциях $\varphi(t)$ с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$. В дальнейшем считается, что $\varphi(t)$ непрерывна справа и $\varphi(0)=0$. Коэффициенты Фурье — Стильтьеса функции $\varphi(t)$ определяются равенством

$$C_n[\varphi]=\int_0^{2\pi} e^{int}\,d\varphi(t). \tag{1}$$

В дальнейшем ищутся условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(t)$, чтобы ее коэффициенты Фурье — Стильтьеса стремились к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} e^{int}\,d\varphi(t)=0. \tag{2}$$

Введем следующие определения.

Определение 1. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_l, \ldots$, лежащих на отрезке $[0, 1]$, называется вейлевски распределенной, если: 1) для всякого t существует частота попадания членов исходной последовательности в интервал $[0, t]$

$$\rho(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{n(t,k)}{k}; \tag{3}$$

(здесь через $n(t, k)$ обозначено число членов последовательности a_l, $l\leqslant k$, попавших в интервал $[0, t]$); исключение могут составить лишь те точки t, в которых функция $\rho(t)$ терпит разрыв. В силу монотонности $\rho(t)$ таких точек не более чем счетное множество; 2) существует значение t, для которого $\rho(t)\neq t$.

Определение 2. Множество E на отрезке $[0, 2\pi]$ называется множеством типа W, если существует такая последовательность целых чисел $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$, что для всякой точки $t\in E$ последовательность дробных долей $\left\{n_1\frac{t}{2\pi}\right\}, \left\{n_2\frac{t}{2\pi}\right\}, \ldots, \left\{n_k\frac{t}{2\pi}\right\}, \ldots$ является вейлевски распределенной.

Очевидно, что любое подмножество множества типа W есть опять-таки множество типа W. Сдвиг множества типа W также есть множество того же типа.

Основным результатом является теорема 1.

Теорема 1. *Для того чтобы коэффициенты Фурье—Стильтьеса функции с ограниченным изменением $\varphi(t)$ стремились к нулю, необходимо и достаточно, чтобы изменение функции $\varphi(t)$ на любом множестве типа W равнялось нулю.*

Введем еще

Определение 3. Функция с ограниченным изменением $\varphi(t)$ принадлежит классу J, если коэффициенты Фурье — Стильтьеса любой функции $\psi(t)$, абсолютно непрерывной относительно $\varphi(t)$, не стремятся к нулю. В частности, коэффициенты Фурье — Стильтьеса самой функции $\varphi(t)$ также не стремятся к нулю.

Теорема 2. *Всякая функция $\varphi(t)$ с ограниченным изменением на $[0, 2\pi]$ однозначно представляется в виде суммы*

$$\varphi(t) = \varphi_{\mathrm{I}}(t) + \varphi_0(t), \tag{4}$$

где $\varphi_{\mathrm{I}}(t)$ принадлежит классу J, а коэффициенты Фурье — Стильтьеса функции $\varphi_0(t)$ стремятся к нулю.

Теорема 3. *Пусть функция $\psi(t)$ принадлежит классу J. Тогда существует множество E, являющееся теоретико-множественной суммой не более чем счетной совокупности множеств типа W, на котором сосредоточено изменение функции $\psi(t)$.*

Существенную роль в доказательстве сформулированных теорем играют следующие леммы.

Лемма 1. *Если коэффициенты Фурье — Стильтьеса функции с ограниченным изменением $\varphi(t)$ стремятся к нулю, а $\psi(t)$ абсолютно непрерывна относительно $\varphi(t)$, то коэффициенты Фурье — Стильтьеса функции $\psi(t)$ также стремятся к нулю.*

Лемма 2. *Пусть счетная совокупность последовательностей функций на $[0, 2\pi]$*

$$\begin{array}{l}
\beta_1^{(1)}(t),\ \ \beta_2^{(1)}(t), \ldots,\ \beta_n^{(1)}(t), \ldots \\
\beta_1^{(2)}(t),\ \ \beta_2^{(2)}(t), \ldots,\ \beta_n^{(2)}(t), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_1^{(k)}(t),\ \ \beta_2^{(k)}(t), \ldots,\ \beta_n^{(k)}(t), \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) $\sup\limits_{k,\, n} \operatorname{vrai\,max} |\beta_n^{(k)}(t)| < +\infty$;

2) *каждая последовательность $\{\beta_n^{(k)}(t)\}$ слабо сходится к некоторому пределу $\beta_k(t)$, т. е. для всякой суммируемой функции $p(t)$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \beta_n^{(k)}(t)\, p(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \beta_k(t)\, p(t)\, dt. \tag{5}$$

В таком случае существует возрастающая последовательность целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots$ такая, что при всех k и почти всех значениях t существует предел средних арифметических

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{n_j}^{(k)}(t) = \beta_k(t). \tag{6}$$

Отмечу, что все формулировки и доказательства могут быть без особого труда перенесены на n-мерный случай.

В заключение приношу свою искренною признательность Н. К. Бари и И. М. Гельфанду за ценное обсуждение содержания настоящей заметки.

Поступило
1 VIII 1950