Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

Р. В. ПЕТРОПАВЛОВСКАЯ

О ЗАКОНАХ В СТРУКТУРАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 VII 1950)

1. В настоящей заметке устанавливаются некоторые результаты, связанные с понятием структуры ([1,2]).

2. Определим индуктивно структурные термы от трех переменных. Буквы x, y, z суть структурные термы от трех переменных. Если T_1, T_2 суть структурные термы от трех переменных, то $(T_1 \cup T_2)$, $(T_1 \cap T_2)$ также суть структурные термы от трех переменных. Для краткости будем называть структурные термы от трех переменных просто т е р м а м и.

Будем говорить, что терм T_1 тождественно равен терму T_2 в структуре S, если для любых элементов a, b, c структуры S в результате подстановки вместо x, y, z a, b, c в термы T_1 и T_2 получается один и тот же элемент структуры S.

Равенство $T_1 = T_2$, где T_1, T_2 суть термы, называется с т р у к т у р н ы м з а к о н о м о т т р е х п е р е м е н н ы х, если терм T_1 не равен тождественно терму T_2 в некоторой структуре, но терм T_1 равен тождественно терму T_2 в некоторой другой структуре, множество элементов которой состоит более чем из одного элемента.

Будем говорить, что в структуре S имеет место структурный закон от трех переменных $T_1 = T_2$, если $T_1 = T_2$ есть структурный закон от трех переменных и T_1 равен тождественно T_2 в S.

3. В качестве примера структурных законов от трех переменных укажем на дистрибутивный закон: $((x \cup y) \cap z) = ((x \cap z) \cup (y \cap z))$ и модулярный закон $(((x \cap z) \cup y) \cap z) = ((x \cap z) \cup (y \cap z))$. Известно, что в модулярной структуре всякий структурный закон от трех переменных равносилен модулярному или дистрибутивному законам. Вопросу о структурных законах от числа переменных, большего чем три, имеющих место в модулярной структуре, посвящена заметка ([3]). Первый пример структурного закона от трех переменных, который может иметь место в немодулярной структуре, дан в работе ([4]).

4. В настоящей заметке строится бесконечное множество различных законов, которые могут иметь место в структурах.

Теорема 1. *Может быть построена бесконечная последовательность структурных законов от трех переменных $З_1, З_2, \ldots, З_n, \ldots$ такая, что:* 1) *если в некоторой структуре имеет место закон $З_n$, то в ней имеет место и закон $З_{n+1}$;* 2) *для всякого n можно построить такую конечную структуру S_n, что в S_n выполняется закон $З_{n+1}$, но не выполняется закон $З_n$.*

Последовательность законов строится, исходя из терма

$$(((((x \cup y) \cap z) \cup y) \cap x) \cup z). \qquad (1)$$

Сначало индуктивно строится бесконечная последовательность термов $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$; T_1 есть терм (1). Если уже построен терм T_n, то T_{n+1} есть терм $(((((x \cup y) \cap T_n) \cup y) \cap x) \cup T_n)$.

Теперь, если положить $З_n: T_n = T_{n+1}$, то последовательность структурных законов от трех переменных $З_1, З_2, \ldots, З_n, \ldots$ будет удовлетворять условиям теоремы.

В качестве структуры S_n годится структура, задаваемая следующей диаграммой рис. 1.

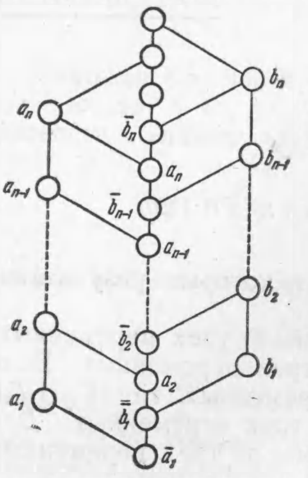

Рис. 1

В связи с этим устанавливается такой результат. Будем рассматривать диаграммы, состоящие из кружков и черточек, вертикальных или наклонных, соединяющих между собой некоторые из кружков. Пусть a, b — кружки какой-нибудь такой диаграммы $Д$. Будем писать $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда или a и b один и тот же кружок $Д$, или существует такая последовательность кружков $Д$ $b_0, b_1, \ldots, b_k (k \geqslant 1)$, что b_0 есть кружок a, b_k есть кружок b, $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ расположен выше, чем b_{i-1}, и соединен с b_{i-1} черточкой. Тогда отношение $\leqslant$ является частично упорядочивающим в множестве всех кружков диаграммы $Д$.

Теорема 2. *Если $Д$ — диаграмма рассматриваемого типа, причем никакие две из ее черточек не пересекаются и имеются в $Д$ кружки I, O такие, что $a \leqslant I$, $a \geqslant O$ для всякого кружка a из $Д$, то частично упорядоченное множество всех ее кружков является структурой*

Поступило
8 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory, N. Y., 1940. [2] А. Г. Курош, Теория групп, 1944. [3] M.-P. Schützenberger, C. R., 221, 218 (1945). [4] H. Löwig, Ann. Math., 44, 573 (1943).