

В. А. МАРЧЕНКО

О ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 VII 1950)

Пусть L — заданный на полуоси $[0, \infty)$ дифференциальный оператор второго порядка

$$L[u] = u''(x) - q(x)u(x),$$

где $q(x)$ — вещественная функция, суммируемая в каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$. Обозначим, как и в ⁽¹⁾, через $\omega_h(\lambda, x)$ решения уравнений $L[u] + \lambda u = 0$ при начальных данных:

$$\omega_h(\lambda, 0) = 1, \quad \omega'_h(\lambda, 0) = h, \quad \text{если } h \neq \infty;$$

$$\omega_h(\lambda, 0) = 0, \quad \omega'_h(\lambda, 0) = 1, \quad \text{если } h = \infty,$$

где h и λ — произвольные вещественные числа.

Известны следующие формулы обращения Г. Вейля:

Существует неубывающая функция $\varphi(\lambda)$ (возможно, не единственная), порождающая изометрическое отображение пространства $L^2[0, \infty)$ на $L_\varphi^2(-\infty, \infty)$ по формулам

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_f(\lambda) \omega_h(\lambda, x) d\varphi(\lambda), \quad E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \omega_h(\lambda, x) dx \quad (1)$$

(интегралы сходятся в метриках пространств $L^2[0, \infty)$ и $L_\varphi^2(-\infty, \infty)$ соответственно). При этом справедливо равенство Парсеваля — Вейля:

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |E_f(\lambda)|^2 d\varphi(\lambda). \quad (2)$$

В работе ⁽²⁾ Б. М. Левитан оценил сверху функцию $\varphi(\lambda)$ при больших $\lambda > 0$.

Настоящая заметка посвящена выводу следующих асимптотических формул для функции $\varphi(\lambda)$:

$$1) \varphi(\lambda) \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} \quad (\lambda \rightarrow +\infty), \quad \text{если } h \neq \infty;$$

$$2) \varphi(\lambda) \sim \frac{2}{3\pi} \sqrt{\lambda^3} \quad (\lambda \rightarrow +\infty), \quad \text{если } h = \infty.$$

Пусть, для определенности, $h \neq \infty$ (при $h = \infty$ ход доказательства аналогичен).

Лемма 1. На полуоси $-\infty < \lambda \leq 0$ функция $\varphi(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию; более того, при любом x

$$\int_{-\infty}^{+0} \operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda|} d\varphi(\lambda) < \infty.$$

Доказательство. Пусть $E(\lambda)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |E(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) < \infty$. Положим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(\lambda)| \omega_h(\lambda, x) d\rho(\lambda),$$

где интеграл сходится в метрике пространства $L^2[0, \infty)$. Из вида оператора преобразования* $V = V_{\{LD^{\ast h_0}\}}$, даваемого теоремой А (1), следует

$$\begin{aligned} V[f(x)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} V \left[\int_{-n}^{+0} |E(\lambda)| \omega_h(\lambda, x) d\rho(\lambda) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{+0} |E(\lambda)| \operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda|} d\rho(\lambda), \end{aligned}$$

причем здесь должна иметь место сходимость в среднем квадратичном в каждом конечном интервале. Однако, так как подинтегральная функция неотрицательна, а $\rho(\lambda)$ не убывает, такая сходимость возможна только, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |E(\lambda)| \operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda|} d\rho(\lambda) < \infty$ при любом x , откуда, ввиду произвольности функции $E(\lambda) \in L_p^2(-\infty, 0]$, уже легко следует справедливость при любом x неравенства $\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda|}|^2 d\rho(\lambda) < \infty$, которое и доказывает лемму.

Будем называть функцию $f(x) \in L^2[0, \infty)$ финитной, если она равна нулю вне некоторого конечного интервала. Для любой финитной функции $f(x)$ примем следующие обозначения:

$$E_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \omega_h(\lambda, x) dx, \quad C_f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx.$$

Согласно теореме А (1), для любой финитной функции $f(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) \cos x \sqrt{\lambda} dx &= \int_0^{\infty} f(x) \omega_h(\lambda, x) dx + \\ &+ \int_0^{\infty} \left(f(x) \int_0^x K(x, t) \omega_h(\lambda, t) dt \right) dx, \end{aligned} \tag{3}$$

где ядро $K(x, t)$ равномерно ограничено в каждом конечном квадрате. Положим

$$\tilde{f}(t) = \int_t^{\infty} K(x, t) f(x) dx.$$

Тогда $\tilde{f}(t)$ тоже финитная функция и, согласно (3), $C_f(\sqrt{\lambda}) = E_f(\lambda) + E_{\tilde{f}}(\lambda)$. Функция $\psi(x) = f(x) + \tilde{f}(x)$, очевидно, тоже финитна и $E_{\psi}(\lambda) = E_f(\lambda) + E_{\tilde{f}}(\lambda)$, т. е.

$$E_{\psi}(\lambda) = C_f(\sqrt{\lambda}). \tag{4}$$

* Для оператора преобразования мы всюду сохраняем обозначения заметки (1).

Имеем далее $|\|f\|^2 - \|\psi\|^2| \leq \|\tilde{f}\|(2\|f\| + \|\tilde{f}\|)$, или, согласно (2) и (4),

$$\left| \|f\|^2 - \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(V\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right| \leq \|\tilde{f}\|(2\|f\| + \|\tilde{f}\|), \quad (5)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \left| \|f\|^2 - \int_0^{\infty} |C_f(V\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right| &\leq \int_{-\infty}^{+0} |C_f(V\lambda)|^2 d\rho(\lambda) + \\ &+ \|\tilde{f}\|(2\|f\| + \|\tilde{f}\|). \end{aligned} \quad (6)$$

Введем вспомогательную функцию $\sigma(\lambda)$, определенную равенством $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda^2)$ при $\lambda \geq 0$ и нечетно продолженную на отрицательную полуось (мы считаем, что функция $\rho(\lambda)$ нормирована условием $\rho(+0) = 0$).

Теперь неравенство (6) перепишется так

$$\left| \|f\|^2 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \right| \leq \int_{-\infty}^{+0} |C_f(V\lambda)|^2 d\rho(\lambda) + \|\tilde{f}\|(2\|f\| + \|\tilde{f}\|). \quad (7)$$

Лемма 2. Для любой финитной функции $f(x)$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(\lambda + a) + C_f(\lambda - a)|^2 d\sigma(\lambda) = \|f\|^2.$$

Лемма 3. Равномерно для всех a и $\lambda \geq 1$

$$\sigma(a + \lambda) - \sigma(a - \lambda) \leq C\lambda,$$

где C — некоторая константа.

Лемма 4. Если косинус-преобразование Фурье $C_f(\lambda)$ финитной функции $f(x)$ удовлетворяет условию $C_f(\lambda) = O(\lambda^{-2})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_f(\lambda + a) C_f(\lambda - a) d\sigma(\lambda) = 0.$$

Из лемм 2 и 4 непосредственно вытекает важное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(\lambda)|^2 d\{\sigma(a + \lambda) - \sigma(a - \lambda)\} &= \\ = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \{|C_f(\lambda + a)|^2 + |C_f(\lambda - a)|^2\} d\sigma(\lambda) &= \|f\|^2, \end{aligned} \quad (8)$$

справедливое для функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям леммы 4.

Лемма 5. Имеет место равенство

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \{\sigma(a + \lambda) - \sigma(a - \lambda)\} = \frac{4}{\pi} \lambda.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда из оценки леммы 3, согласно теореме Хелли, следует существование такой последовательности чисел $\{a_n\}$ ($a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$), что функции $\{\sigma(a_n + \lambda) - \sigma(a_n - \lambda)\}$ при $n \rightarrow \infty$ в основном сходятся к некоторой, очевидно нечетной и неубывающей, функции $\sigma_1(\lambda) \neq \frac{4}{\pi} \lambda$. Оценка леммы 3 позволяет в (8) перейти к пределу под знаком интеграла, что дает

$$\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(\lambda)|^2 d\sigma_1(\lambda) = \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |C_f(\lambda)|^2 d\lambda,$$

если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4. В частности, при $C_f(\lambda) = \left(\frac{\sin h\lambda}{h\lambda}\right)^2 \cos \mu\lambda$ ввиду произвольности μ получим

$$\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin h\lambda}{h\lambda}\right)^4 \cos t\lambda d\sigma_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin h\lambda}{h\lambda}\right)^4 \cos t\lambda d\lambda.$$

Умножая обе части этого равенства на $\sin at/t$ и интегрируя по t от $-\infty$ до $+\infty$, получим (в предположении, что a — точка непрерывности функции $\sigma_1(\lambda)$):

$$\frac{\pi}{4} \int_{-a}^a \left(\frac{\sin h\lambda}{h\lambda}\right)^4 d\sigma_1(\lambda) = \int_{-a}^a \left(\frac{\sin h\lambda}{h\lambda}\right)^4 d\lambda,$$

откуда при $h \rightarrow 0$ следует:

$$\frac{1}{2} \sigma_1(a) = \frac{1}{4} \{\sigma_1(a) - \sigma_1(-a)\} = \frac{2}{\pi} a,$$

т. е. $\sigma_1(a) = \frac{4}{\pi} a$ во всех точках непрерывности. Но так как функция $\sigma_1(\lambda)$ не убывает, то это равенство справедливо всюду, что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

Доказательство асимптотической формулы 1). Из леммы 5 следует, что данному $\varepsilon > 0$ соответствует такое N , что

$$\sigma(N + 2k + 1) - \sigma(N + 2k - 1) = \frac{4}{\pi} + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon,$$

при всех $k \geq 0$. Суммируя эти равенства по k от 0 до n , получим

$$\sigma(N + 2n + 1) - \sigma(N - 1) = \frac{4}{\pi}(n + 1) + \eta_n(n + 1), \quad |\eta_n| < \varepsilon,$$

откуда следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sigma(N + 2n + 1)}{N + 2n + 1} - \frac{2}{\pi} \right| < \varepsilon.$$

Ввиду того, что функция $\sigma(\lambda)$ не убывает и $\varepsilon > 0$ произвольно, получим $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma(\lambda) \lambda^{-1} = \frac{2}{\pi}$, или, переходя снова к функции $\rho(\lambda)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \rho(\lambda) \lambda^{-1/2} = \frac{2}{\pi},$$

что и требовалось доказать.

Леммы 1 и 5 имеют и самостоятельный интерес. В частности, из леммы 1 непосредственно следует, что при любом x интеграл

$$\int_{-\infty}^N E(\lambda) \omega_h(\lambda, x) d\rho(\lambda) \quad (N < +\infty)$$

абсолютно сходится, если $E(\lambda) \in L_p^2(-\infty, \infty)$.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
29 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Марченко, ДАН, 74, № 3 (1950). ² Б. М. Левитан, ДАН, 71, № 4 (1950).