Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. А. ИЛЬИН

О СХОДИМОСТИ БИЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 VI 1950)

В ряде задач математической физики существенное значение имеет вопрос о сходимости билинейных рядов из собственных функций, т. е. рядов вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^p},$$

где $\{u_i(P)\}$ и $\{\lambda_i\}$ — система собственных функций и собственных чисел волнового уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в некоторой области G с однородными краевыми условиями, а p — произвольная степень.

При $p = 1$ получаем ряд Фурье для функции источника уравнения Лапласа. Из работы (1) следует, что весьма существенны и ряды с дробными p. Вопрос о сходимости билинейных рядов исследован очень мало. Из общей теории известно только, что для двух и трех измерений абсолютно сходятся ряды для второй итерации $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^2}$ и что ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i}$ сходятся в среднем к функции источника.

Вопрос об условной сходимости был рассмотрен для частного вида области n-мерного прямоугольного параллелепипеда в работе (2). В этой работе доказано, что для n-мерного прямоугольного параллелепипеда билинейные ряды со степенью собственного числа p, заключенной в пределах $\frac{n-1}{2} < p \leqslant \frac{n}{2}$, заведомо не сходятся абсолютно, но сходятся условно при суммировании в естественном порядке возрастания собственных чисел везде, кроме сколь угодно малой окрестности источника.

В настоящей статье решен вопрос об абсолютной сходимости и о сходимости в среднем билинейных рядов для произвольной n-мерной области G, допускающей функцию источника. На основании этого дается решение вопроса об условной сходимости билинейных рядов для n-мерных цилиндров с произвольным $(n-1)$-мерным сечением.

§ 1. Начнем с исследования абсолютной сходимости билинейных рядов.

Теорема. *Для произвольной n-мерной области G с однородными краевыми условиями билинейный ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

сходится абсолютно в любых внутренних точках P и Q области G, причем эта сходимость будет равномерной относительно P, Q, когда P, Q принадлежат некоторой внутренней подобласти G' области G.

Статья [2] показывает, что этот результат не может быть улучшен: предельный переход при $\varepsilon \to 0$ невозможен.

Сформулированная выше теорема с очевидностью вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если в некоторой внутренней подобласти $G^{(1)}$ области G для любых положительных β и δ и любого номера N выполняется неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^2(P)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\beta+\delta}} \leqslant M,$$

где M — некоторая константа, то в любой внутренней подобласти $G^{(2)}$ области $G^{(1)}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^2(P)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\frac{\beta}{2}+\delta}} \leqslant A_\delta \sqrt{M},$$

где A_δ — эффективно вычисляемая константа, зависящая лишь от δ и от рассматриваемой подобласти $G^{(2)}$.

Для доказательства леммы обратимся к теореме о среднем для произвольной n-мерной области G [3]:

$$u_i(P_0)\bar{S}_r\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\frac{r\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)} = \int_{S_r} u_i\,ds. \tag{1}$$

Здесь S_r — $(n-1)$-мерная сфера с центром в P_0, целиком лежащая в G, $\bar{S}_r$ — поверхность этой сферы, равная $\mathrm{const}\cdot r^{(n-1)}$.

Интегрируем обе части по dr от 0 до R, получим:

$$\mathrm{const}\cdot u_i(P_0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu R^{2\nu+n}\left(\frac{r\sqrt{\lambda_i}}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,(2\nu+n)\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)} = \int_{\Omega_R} u_i(P)\,dP.$$

Здесь Ω_R — n-мерный шар радиуса R с центром в P_0. Вынося R^n за знак суммы и положив $R=1/\sqrt{\lambda_i}$, можем записать:

$$\mathrm{const}\,\frac{u_i(P_0)}{\lambda_i^{n/2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}}{\nu!\,(2\nu+n)\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)} = \int_{\Omega_i} u_i(P)\,dP;$$

Ω_i — шар радиуса $1/\sqrt{\lambda_i}$ с центром в P_0.

Обозначив константу в левой части в соединении с суммой числового ряда через C, получим:

$$C\,\frac{u_i(P_0)}{\lambda_i^{n/2}} = \int_{\Omega_i} u_i(P)\,dP. \tag{2}$$

Нам в дальнейшем нужно требовать, чтобы шар Ω_i целиком лежал в $G^{(1)}$. Это всегда будет выполняться, если считать точку P_0 принадлежащей фиксированной внутренней подобласти $G^{(2)}$ области $G^{(1)}$ и отбросить конечное число номеров i. Для простоты мы изменим нумерацию и будем попрежнему считать $i=1, 2, \ldots$

Возводя (2) в квадрат и умножая обе части на $\lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}$, получим:

$$C\frac{u_i^2(P_0)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} = \int\limits_{\Omega_i}\int\limits_{\Omega_i} u_i(P)\, u_i(Q)\, \lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\, dP\, dQ. \tag{3}$$

Просуммируем (3) по всем i от 1 до N:

$$C\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i^2(P_0)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega_i}\int\limits_{\Omega_i} u_i(P)\, u_i(Q)\, \lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\, dP\, dQ. \tag{4}$$

Каждый шар Ω_k представляется в виде суммы внутреннего шара Ω_{k+1} и кольцевого слоя C_k между этими шарами. Если в правой части (4) перейти к кольцевым слоям, то легко преобразовать (4) к следующему равенству:

$$C^2\sum_{i=1}^{N}\frac{u_i(P_0)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{C_k}\int\limits_{C_k}\sum_{i=1}^{k} u_i(P)\, u_i(Q)\, \lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\, dP\, dQ + \right.$$

$$\left. + 2\int\limits_{C_k}\int\limits_{\Omega_{k+1}}\sum_{i=1}^{k} u_i(P)\, u_i(Q)\, \lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\, dP\, dQ\right) +$$

$$+\int\limits_{\Omega_N}\int\limits_{\Omega_N}\sum_{i=1}^{N} u_i(P)\, u_i(Q)\, \lambda_i^{\frac{n}{2}-\varepsilon}\, dP\, dQ. \tag{5}$$

Полагая в соотношении (5) $\varepsilon = \frac{\beta}{2} + \delta$ и производя оценку интегралов в правой части с помощью неравенства Буняковского, нетрудно доказать формулированную выше лемму, а следовательно, и теорему.

§ 2. Перейдем к исследованию сходимости в среднем.

Теорема. *Для произвольной n-мерной области G с однородными краевыми условиями билинейный ряд вида*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{n}{4}+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0)$$

сходится в среднем при интеграции по Q для всех значений P внутри области G. Эта сходимость будет равномерной по P, когда P принадлежит любой внутренней подобласти G' области G.

Для доказательства достаточно заметить, что вопрос о сходимости в среднем эквивалентен вопросу об абсолютной сходимости ряда с удвоенной степенью λ.

Это следует из равенства:

$$\int\limits_{G}\left(\sum_{i=N}^{N+P}\frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{n}{4}+\varepsilon}}\right)^2 dQ = \sum_{i=N}^{N+P}\frac{u_i^2(P)}{\lambda_i^{\frac{n}{2}+2\varepsilon}}.$$

Отсюда же следует, что результат не может быть улучшен: предельный переход при $\varepsilon \to 0$ невозможен.

§ 3. С помощью результата § 1 легко решить вопрос об условной сходимости билинейных рядов для n-мерных цилиндров с произвольным $(n-1)$-мерным основанием.

При этом мы используем результат об абсолютной сходимости билинейного ряда для $(n-1)$-мерного сечения и тот факт, что цилиндр допускает разделение переменных. Доказательство производится с помощью преобразования Абеля методом, весьма близким приведенному в работе ([2]).

Здесь мы ограничимся формулировкой результата. Для n-мерного цилиндра с произвольным сечением и осью, параллельной x_n, с произвольными однородными краевыми условиями на «боковой» поверхности и нулевыми краевыми условиями на «верхнем» и «нижнем» основаниях билинейный ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\lambda_i^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{6}$$

сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел в любой внутренней точке, для которой $x_n \neq \xi_n$, причем сходимость будет равномерной во всяком внутреннем коаксиальном цилиндре при $|x_n - \xi_n| \geqslant \delta$, где δ сколь угодно мало.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, под руководством которого сделана эта работа. Я также благодарен за помощь в работе А. А. Самарскому и О. И. Панычу.

Поступило
16 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ, 16, 1283 (1947). [2] В. А. Ильин, ДАН, 74, № 3 (1950). [3] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945.