

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. Х. КОГАН

ВОЗБУЖДЕНИЕ СПИРАЛЬНОЙ ЛИНИИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 10 VII 1950)

В работе ⁽¹⁾ было показано, что ток в проводе спиральной линии может быть записан в виде

$$I = \sum_{n=1}^3 I_n e^{j\omega_n L}, \quad (1)$$

где постоянные распространения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ определяются из решения трансцендентного уравнения. Для определения амплитудных коэффициентов I_1, I_2, I_3 необходимо решить задачу о возбуждении спиральной линии сторонней э. д. с.*.

Пусть возбуждающая э. д. с. приложена к бесконечно малому элементу провода в сечении $L = 0$. Тогда распределение приложенной э. д. с. E^{cm} вдоль провода спирали может быть записано в виде δ -функции**

$$E^{cm} = g(L) = \mathcal{E}\delta(L). \quad (2)$$

При учете конечной проводимости спирали граничное условие принимает вид, данный М. А. Леонтовичем:

$$E_L = -E^{cm} + \alpha H_u. \quad (3)$$

Здесь E_L — тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности спирали, H_u — составляющая магнитного поля в направлении, касательном к проводу и перпендикулярном к направлению L ,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j \frac{4\pi\sigma}{\omega}}}.$$

Граничное условие (3) отличается от аналогичного условия, соответствующего свободным колебаниям идеально проводящей спирали, рассмотренной в работе ⁽¹⁾, наличием (отличной от нуля) правой части. В работе ⁽¹⁾ (формула (5)) граничное условие записано в интегральной форме

$$E_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL = 0 \quad (L = z_1/\sin \delta) \quad ***, \quad (4)$$

$$f(L_1 - L) = f(|L_1 - L|).$$

* Все остальные обозначения такие же, что и в работе ⁽¹⁾.

** Напомним, что здесь, как и в работе ⁽¹⁾, мы требуем выполнения граничного условия не на всей поверхности провода спирали, а лишь на образующей линии, являющейся геометрическим местом точек касания спирали с цилиндром радиуса $r_0 + a_0$.

*** В работе ⁽¹⁾ в формулах (5), (6) ошибочно напечатано $z_1 = L/\sin \delta$.

Очевидно, в нашем случае интегральная форма граничного условия будет иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL = -E^{cm} + \alpha H_u. \quad (3a)$$

Выразив H_u через полный ток в проводе и используя обозначение (2), придадим равенству (3a) следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(L) f(L_1 - L) dL + g(L_1) = vJ(L_1), \quad (3b)$$

где

$$v = \sqrt{j \frac{\mu k}{\pi a^2 c \sigma}}.$$

Это равенство можно рассматривать как интегральное уравнение, определяющее распределение полного тока в проводе спирали. Его решение имеет вид (2)

$$J(L) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwL} \frac{G(w)}{v - F_1(w)} dw, \quad (5)$$

где

$$F_1(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwL} f(L) dL,$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwL} g(L) dL = \mathcal{G}.$$

Таким образом,

$$J(L) = \frac{\mathcal{G}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jwL}}{v - F_1(w)} dw. \quad (5a)$$

Сделаем замену переменной $h = w/\sin \delta$, $z = L \sin \delta$, после чего получим

$$J(z) = \frac{\mathcal{G} \sin \delta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jhz}}{v - F(h)} dh, \quad (6)$$

где положено $F(h) = F_1(w)$.

Очевидно, выражение для $F_1(w) = F(h)$ равно левой части выражения (4), если в последнем положить $J(L) = e^{jwL}$ и $L_1 = 0$. Последнее же, как показано в работе (1) (см. (4), (9), (10)), может быть представлено в виде ряда

$$F(h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j \frac{\sin \delta}{kc} [2B_{m,0}(k^2 - h^2) + k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta (B_{m,1} + B_{m,-1})]. \quad (7)$$

При $\delta = \pi/2$ спираль вырождается в прямолинейный провод, и в этом случае выражение (6) совпадает с интегральным выражением для тока в тонком прямолинейном проводе, впервые полученным В. В. Владимирским.

Таким образом, задача определения полного тока (а следовательно, и амплитудных коэффициентов) сводится к вычислению интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)} dh.$$

При этом мы изменили знак в показателе числителя, что не меняет значения интеграла, так как $F(h)$ — четная функция. Подынтегральная функция имеет полюса в точках h_p , являющихся корнями уравнения

$$v - F(h) = 0. \quad (8)$$

Так как $\operatorname{Re} v > 0$, то для выполнения равенства (8) необходимо, чтобы $\operatorname{Re} F(h) > 0$, а отсюда $\operatorname{Im} h > 0$. Таким образом, полюса подынтегрального выражения лежат в верхней полуплоскости. Положив, что среда, окружающая спираль, обладает некоторой весьма малой проводимостью, найдем, что в верхней полуплоскости расположены точки ветвления типа

$$h_{qm} = k + \frac{2\pi}{s} m.$$

Составим контурный интеграл $N = \int_{\Gamma} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)} dh$ так, чтобы путь интегрирования Γ проходил по вещественной оси плоскости переменного h от $-\infty$ до $+\infty$, затем по бесконечной полуокружности, лежащей

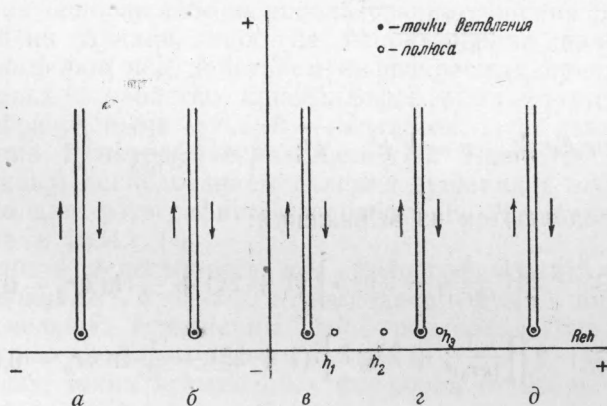


Рис. 1. $a = -\frac{4\pi}{s} + k$, $б = -\frac{2\pi}{s} + k$, $в = k$, $г = \frac{2\pi}{s} + k$, $д = \frac{4\pi}{s} + k$

в верхней полуплоскости, с обходом точек ветвления (линии разрезов определяются уравнением $\operatorname{Re} h_{qm} = \text{const}$ (см. рис. 1)).

Так как внутри контура интегрирования содержатся только полюса, то интеграл N равен сумме вычетов P относительно этих полюсов. С другой стороны, интеграл N можно представить в виде суммы

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jhz}}{v - F(h)} dh + Q = P,$$

где Q — сумма интегралов по линиям обхода разрезов. Так как для металла v очень мало, то пренебрежение этой величиной в знаменателе подынтегрального выражения в формуле (9) не скажется на точности вычисления вычетов. Вычисление P и Q производим, используя значения, полученные в результате приближенного суммирования ряда (7)

при небольших углах подъема ($\delta < 20^\circ$). Интегралы по линиям обхода разрезов дают составляющие токов, амплитуда которых убывает с увеличением расстояния z от точки возбуждения как $1/\ln z$, $1/z$, $1/z^2$, ... и т. д.

Интегрирование по контурам, окружающим полюса, дает составляющие токов, распространяющихся вдоль линии без затухания. Последние представляют наибольший интерес, так как затухающие волны локализованы вблизи точки возбуждения, и в большинстве случаев при проведении анализа применяющихся на практике спиральных линий амплитудой затухающих волн можно пренебречь.

Расчет I_1 , I_2 , I_3 при различных значениях kr_0 дает следующие результаты:

I	$kr_0 < 1$ (область ускорений)	$kr_0 < \frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta}$ (регулярная область)	$\frac{\cos \delta}{1 + \sin \delta} < kr_0 < \frac{\cos \delta}{-\sin \delta}$ (область замедлений)
I_1	$\frac{\mathcal{E}kc}{2h_1(2\ln \frac{t}{2} + 1)}$	$\frac{\mathcal{E}kc r_0 \cos \delta}{2}$	—
I_2	$\frac{\mathcal{E}c\Delta_2}{\text{ctg}^2 \delta}$		—
I_3	$\frac{\mathcal{E}c\Delta_3}{k \text{ctg}^2 \delta}$		—

$$t = 0,577 \nu r_0 \beta e^{-\xi}; \quad v = \sqrt{h_1^2 - k^2}; \quad \xi = -\frac{1}{\text{ctg} \delta} \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{s} a_0} \right)$$

Δ_2 и Δ_3 определяются из выражений:

$$\ln \Delta_2 r_0 \approx -2 \left\{ \left[\frac{1}{(kr_0)^2} - 2 \text{tg} \delta \right]^2 (1 + 2\xi) + \frac{1}{2} \ln kr_0 - 0,041 \right\}$$

$$\ln \Delta_3 r_0 \approx -2 \left\{ \left[\frac{1}{(kr_0)^2} + 2 \text{tg} \delta \right]^2 (1 + 2\xi) + \frac{1}{2} \ln kr_0 - 0,041 \right\}.$$

Так как $\Delta_2 \ll k$ и $\Delta_3 \ll k$, то в первых двух областях можно пренебречь амплитудами I_2 и I_3 и практически считать, что вдоль провода распространяется только одна волна с постоянной распространения w_1 , что и наблюдается на практике. Лишь в небольшом интервале частот, при приближении к первой критической частоте, амплитуда I_2 становится сравнимой с амплитудой I_1 . В третьей области, как было показано раньше⁽¹⁾, существует лишь одна волна тока с постоянной распространения w_3 .

Автор выражает благодарность за руководство и интерес, проявленный к настоящей работе, проф. Я. Н. Фельду и Л. А. Вайнштейну.

Поступило
15 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Х. Коган, ДАН, 66, № 5, 867 (1949). В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, 1941.