Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

ИЗЛУЧЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ИЗ ОТКРЫТОГО КОНЦА КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 10 VII 1950)

В наших предыдущих работах изложена строгая теория излучения звуковых ([1]) и симметричных электромагнитных ([2]) волн из открытого конца круглой трубы. Методы, использованные в этих работах, оказываются, однако, в своем непосредственном виде неприменимыми к несимметричным электромагнитным волнам в круглом волноводе по следующим причинам.

Пусть, например, в полубесконечной трубе $r<a$, $z>0$ по направлению к открытому концу распространяется электрическая волна E_{pl}. Электромагнитное поле, возникающее в результате дифракции такой волны на открытом конце, имеет продольную составляющую электрического вектора Герца вида

$$\Pi_{ez} = \sin(p\varphi + \varphi_0)\,\Pi(r,\ z) \tag{1}$$

с той же азимутальной зависимостью $\sin(p\varphi+\varphi_0)$, что и у приходящей волны E_{pl}, и, кроме того, продольную составляющую магнитного вектора Герца вида

$$\Pi_{mz} = \cos(p\varphi + \varphi_0)\,\widetilde{\Pi}(r,\ z). \tag{2}$$

С помощью одной только функции Герца (1) получить решение данной дифракционной задачи оказывается невозможным, наличие же двух функций Герца весьма усложняет нахождение решения, поскольку, например, здесь уже нельзя свести задачу к одному интегральному уравнению (как в ([2])). Однако точное решение может быть получено путем некоторого обобщения метода, примененного нами в ([1]), а именно следующим образом.

Каждая из функций $\Pi(r,\ z)$ и $\widetilde{\Pi}(r,\ z)$ должно быть решением уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(z\,\frac{\partial \Pi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2}\right)\Pi = 0, \tag{3}$$

причем, как это следует из связи Π и $\widetilde{\Pi}$ с электромагнитными полями, при $r=a$ (т. е. на идеально проводящей и бесконечно тонкой стенке трубы при $z>0$ и ее геометрическом продолжении при $z<0$) должны быть непрерывны Π и $\partial\widetilde{\Pi}/\partial r$. Это заставляет искать Π и $\widetilde{\Pi}$ в виде

$$\begin{aligned} \Pi(r,\ z) &= \frac{2\pi^2 a}{ck}\int\limits_C r^{iwz}\left\{\begin{matrix} J_p(vr)\,H_p(va) \\ J_p(va)\,H_p(vr)\end{matrix}\right\} F(w)\,dw, \\ \widetilde{\Pi}(r,\ z) &= -\,\frac{i2\pi^2 a}{c}\int\limits_C e^{iwz}\left\{\begin{matrix} J_p(vr)\,H_p'(va) \\ J_p'(va)\,H_p(vr)\end{matrix}\right\}\frac{1}{v}\,G(w)\,dw. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь J_p и $H_p = H_p^{(1)}$ суть функции Бесселя и Ханкеля (для временной зависимости $e^{-i\omega t} = e^{-ickt}$), а

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \operatorname{Im} v > 0 \quad (\text{при } \operatorname{Im} k > 0). \tag{5}$$

Верхнюю строку в фигурных скобках (4) нужно брать при $r < a$, нижнюю — при $r > a$. Контур C в плоскости комплексного переменного w в основном проводится по вещественной оси, но охватывает снизу точки, соответствующие волновым числам волн, приходящих к концу волновода.

Вектор поверхностной плотности тока на стенке трубы имеет составляющие

$$\begin{gathered} j_\varphi = \cos(p\varphi + \varphi_0) \int\limits_C e^{iwz} G(w)\, dw, \\ j_z = \sin(p\varphi + \varphi_0) \int\limits_C c^{iwz} \left[F(w) + \frac{ip}{a}\frac{w}{v^2} G(w)\right] dw. \end{gathered} \tag{6}$$

Для функций $F(w)$ и $G(w)$, входящих в выражения для потенциалов (4), токов (6) и полей, должны выполняться следующие соотношения. На продолжении стенки трубы должно быть $f_\varphi = f_z = 0$, поэтому

$$\int\limits_C e^{iwz} G(w)\, dw = 0 \quad \text{при } z < 0; \tag{7}$$

$$\int\limits_C e^{iwz} \left[F(w) + \frac{ip}{a}\frac{w}{v^2} G(w)\right] dw = 0 \quad \text{при } z \leqslant 0. \tag{8}$$

Последнее соотношение должно выполняться и при $z = +0$, так как на краю стенки нет линейного распределения заряда. На самой стенке исчезают составляющие E_z и E_φ электрического поля, что дает соотношения:

$$\int\limits_C e^{iwz} v\varphi(wa) F(w)\, dw = 0 \quad \text{при } z > 0; \tag{9}$$

$$\int\limits_C e^{iwz} \left[\frac{\psi(wa)}{v} G(w) + \frac{ip}{k^2 a}\frac{w\varphi(wa)}{v} F(w)\right] dw = 0 \quad \text{при } z > 0, \tag{10}$$

где

$$\varphi(wa) = \pi\, va H_p(va) J_p(va), \quad \psi(wa) = \pi\, va H_p'(va) J_p'(va). \tag{11}$$

Покажем, как решить (при $\operatorname{Im} k > 0$) систему функциональных уравнений (7) — (10), к которой свелась вся наша задача, для того случая, когда к открытому концу бегут две волны E_{pl} и H_{pl}, соответственно с амплитудами A и B и волновыми числами $-h$ и $-\tilde{h}$. Если функция $G(w)$ имеет при $w = -\tilde{h}$ простой полюс с вычетом B, а кроме этой точки всюду в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} w \leqslant 0$) голоморфна и равномерно стремится к нулю при $|w| \to \infty$, то выполняется соотношение (7). Для выполнения соотношения (8) нужно, чтобы функция $F(w)$ имела простые полюса при $w = -h$ (с вычетом A) и при $w = -k$, а за исключением этих точек была голоморфна в нижней полуплоскости, где при $|w| \to \infty$ произведение $wF(w)$ должно равномерно стремиться к нулю. Если произведение $v\varphi(wa)F(w)$ в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} w \geqslant 0$) голоморфно и стремится при $|w| \to \infty$ к нулю равномерно, то соотношение (9) также выполняется. Наконец, соотношение (10) заставляет накладывать на произведение $\frac{\psi(wa)}{v} G(w)$

требование голоморфности во всей верхней полуплоскости (за исключением точки $w = k$, где должен быть простой полюс) и равномерного стремления к нулю в бесконечности.

По этим соображениям мы ищем функции $F(w)$ и $G(w)$ в виде

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \frac{1}{\sqrt{k-w}\,\varphi_2(wa)}\left[\frac{F_1}{w+h} + \frac{F_2}{k+w}\right],\\
G(w) &= \frac{\sqrt{k-w}}{\psi_2(wa)}\left[\frac{G_1}{w+\tilde{h}} + \frac{G_2}{k-w}\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где F_1, F_2, G_1 и G_2 — не зависящие от w постоянные, а φ_2 и ψ_2 — вспомогательные функции, входящие в разбиения функций (11) на множители

$$\varphi(wa) = \varphi_1(wa)\,\varphi_2(wa), \quad \psi(wa) = \psi_1(wa)\,\psi_2(wa). \tag{13}$$

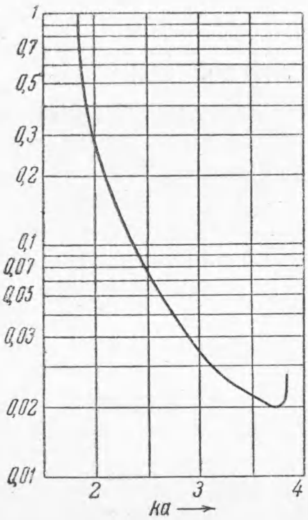

Рис. 1

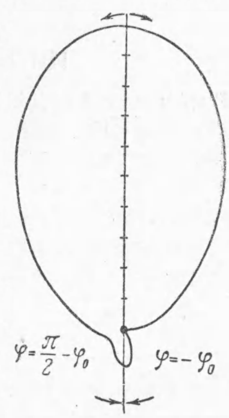

Рис. 2. Диаграммы направленности для волны H_{11}. Слева — в плоскости $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$, справа — в плоскости $\varphi = -\varphi_0$

Это разбиение производится так же, как и в других случаях [1,2]. Постоянные F_1 и F_2 определяются амплитудами A и B плотности тока набегающих волн:

$$F_1 = \frac{A}{2\pi i}\sqrt{k+h}\,\varphi_1(ha), \quad G_1 = \frac{B}{2\pi i}\frac{\psi_1(\tilde{h}a)}{\sqrt{k+\tilde{h}}}, \tag{14}$$

где функции $\varphi_1(wa) = \varphi_2(-wa)$ и $\psi_1(wa) = \psi_2(-wa)$ также определяются разбиением (13). Постоянные F_2 и G_2 определяются из требования отсутствия полюсов у подинтегральных функций: при $w = -k$ в (8) и при $w = k$ в (10). Это дает нам уравнения

$$F_2 - k\Delta\left(-\frac{2k}{k-\tilde{h}}G_1 + G_2\right) = 0, \quad kG_2 + \Delta\left(\frac{2k}{k+h}F_1 + F_2\right) = 0, \tag{15}$$

где

$$\Delta = \frac{ip}{2ka}\,\frac{\varphi_1(ka)}{\psi_1(ka)}. \tag{16}$$

Отсюда F_2 и G_2 и выражаются через F_1 и G_1, т. е. через A и B. Таким образом определяются однозначно функции $F(w)$ и $G(w)$, дающие искомое точное решение рассматриваемой дифракционной задачи.

Если к концу волновода приходит, например, только магнитная волна H_{pl}, то надо положить $A=0$ и $F_1=0$. При этом для несимметричных волн ($p=1, 2, 3, \ldots$) получаем $F_2 \neq 0$, т. е. при дифракции возникает электрическая функция Герца и в числе отраженных от конца волн присутствуют электрические волны E_{pm} с той же азимутальной зависимостью.

При $p=0$ мы возвращаемся к формулам теории симметричных волн [2].

Полученные формулы позволяют дать расчет величин, интересных с физической точки зрения. Так, на рис. 1 дана зависимость абсолютной величины коэффициента отражения волны H_{11} (по полю) от переменного ka, а на рис. 2 — диаграммы направленности для этой волны (по мощности) при $ka=2$.

Поступило
20 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Вайнштейн, ДАН, 58, 1957 (1947); ЖТФ, 19, 911 (1949). [2] Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 18, 1543 (1948).