Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА — СЛУЧАЙ ДВУХ ФАЗ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 10 VII 1950)

Задача Стефана рассматривает температурное распределение в двух средах, представляющих жидкую и твердую фазы однородного тела. Их касательная поверхность находится при постоянной температуре φ_0 (температура плавления) и является тоже неизвестной в задаче. Рассмотрим следующий линейный случай. Твердая и жидкая фазы A_1 и A_2 одного тела (например, лед — вода, тогда $\varphi_0 = 0$) представляют бесконечные плоские касающиеся слои толщиной l_1 и l_2 с нормалью OX к граничным плоскостям. Процесс зависит пространственно только от x и для удобства будем говорить о стержнях A_1 и A_2. A_1 простирается от точки O' $(x = x')$ до точки $O(x = s(t))$ и A_2 — от точки O до точки $O''(x = x'')$. Температурные функции $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ фаз A_1 и A_2 будут удовлетворять уравнениям

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} \quad (x' < x < s(t)); \tag{1}$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} \quad (s(t) < x < x''). \tag{1'}$$

Даны начальные условия:

$$u^{(1)}(x, t_0) = \Phi_1(x) \ (x' < x < s(t_0)), \ u^{(2)}(x, t_0) = \Phi_2(x) \ (s(t_0) < x < x'') \tag{2}$$

и условия на концах O' и O'':

$$u^{(1)}(x', t) = \varphi_1(t), \quad u^{(2)}(x'', t) = \varphi_2(t) \quad (t_0 < t), \tag{3}$$

где Φ_1, Φ_2, φ_1, φ_2 — ограниченные интегрируемые функции своих аргументов. В точке соприкосновения $O(u = \varphi_0)$ имеем условие Стефана

$$\frac{ds}{dt} = e\left(k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=s(t)}, \quad e = \frac{1}{\rho\delta}, \tag{4}$$

δ — скрытая теплота плавления, ρ — плотности A_1 и A_2, приняты) равными.

Задача Стефана состоит в следующем: н а й т и ф у н к ц и и $u^{(1)}(x, t)$, $u^{(2)}(x, t)$, $s(t)$, у д о в л е т в о р я ю щ и е (1), (1'), (2), (3), (4).

Стефан [1] разрешил частный случай $l_1 = l_2 = \infty$, $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$. Л. И. Рубинштейн [2] первый дал решение формулированной здесь задачи при некоторых ограничительных условиях для функций Φ_1 и Φ_2 (например, $\Phi_1(x_0) = \Phi_2(x_0) = \varphi_0$). (В [2] указана и другая литература по этому вопросу.) Употребленный в [3, 4] метод, отличающийся от метода Рубинштейна, поддается обобщению для более сложных случаев. Мы его употребим здесь для случая, определенного условиями (1)—(4).

Сначала решим следующую вспомогательную задачу: найти температуру $u(x, t)$ стержня A с начальной температурой $\Phi_2(x)$ (2), с температурой $\varphi_2(t)$ в конце O''(3) и φ_0 по данной непрерывной кривой $C \equiv x = s(t)$, которая пересекается каждой прямой, параллельной OX, в одной точке (для сокращения опущен индекс 2). Эта задача решена в ([5]), стр. 267, где она сведена к интегральному уравнению Вольтерра. Здесь мы даем другое решение, более удобное для последующего. Для этой цели разобьем конечный интервал времени $T\,(t_0,\ t_0 + T = T')$ на n частей t_i, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Через точки $O_i\,(x_i, t_i)$ из $C\,(x_i = s_i = s(t_i))$ проведем прямые, параллельные осям x и t, и заменим кривую $s(t)$ ломаной линией $s_{in}(t) = s_i(t)$, составленной из отрезков, параллельных OX: $(x_i,\ t_i)(x_{i+1}, t_i)$ и параллельных OT: $(x_{i+1}, t_i)(x_{i+1}, t_{i+1})$. Для каждого интервала времени $\Delta t_i\,(t_i < t \leqslant t_{i+1})$ рассмотрим как решение (1') функцию $u_i(x, t) = u_{in}(x, t)$ с начальной температурой $u_i(x, t_i) = u_{i-1}(x, t_i) = \Phi_i(x)$ $(x_i < x < x'')$ и с температурами на концах $u_i(x_i,\ t) = \varphi_0$, $u_i(x'',\ t) = \varphi(t)$ ([6]):

$$u_i(x, t) = V_i(x, t) + W_i(x, t); \tag{5}$$

$$V_i(x, t) = \int\limits_{x_i}^{x''} \Gamma_i(x, \alpha_i, t)\, \Phi_i(\alpha_i)\, d\alpha_i, \quad l_i = x'' - x_i; \tag{6}$$

$$\Gamma_i(x, \alpha_i, t) = \frac{1}{2l_i}\left\{\vartheta_3\left(\frac{x-\alpha_i}{2l_i},\ \frac{a^2(t-t_i)}{l_1^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{x+\alpha_i-2x_i}{2l_i},\ \frac{a^2(t-t_i)}{l_i^2}\right)\right\}, \tag{6'}$$

$$\vartheta_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(x+\nu)^2/t}, \tag{6''}$$

$$W_i(x, t) = -\frac{a^2}{l_i}\int\limits_{t_i}^{t} \varphi_0 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x-x_i}{2l_i},\ \frac{a^2(t-\tau)}{l_i^2}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{a^2}{l_i}\int\limits_{t_i}^{t} \varphi(t-\tau)\, \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x''-x}{2l_i},\ \frac{a^2(t-\tau)}{l_i^2}\right) d\tau. \tag{7}$$

Из (5) с помощью (6) и (7) для $i = 0$ получим $u_0(x, t_1) = \Phi_1(x)$. Полагая в (5) $i = 1$, получим $u_1(x, t_2) = \Phi_2(x)$ и т. д., индуктивным путем придем к

$$u_i(x, t) = u_{in}(x, t) = (\Gamma^i\, \Phi_0) + \sum_{p=0}^{i} (\Gamma^i\, W_p), \tag{8}$$

$$(\Gamma^i\, W_p) = \int\limits_{x_i}^{x''} d\alpha_i\, \Gamma_i(x, \alpha_i, t)\, (\Gamma^{i-1}\, W_p) \quad (p < i-1), \quad (\Gamma^i\, W_i) = W_i, \tag{9}$$

$$(\Gamma^i\, \Phi_0) = \int\limits_{x_i}^{x''} d\alpha_i\, \Gamma_i(x, \alpha_i, t)\, (\Gamma^{i-1}\, \Phi_0),\ (\Gamma^0\, \Phi_0) = \int\limits_{x_0}^{x''} d\alpha_0 \Gamma_0(\alpha_1, \alpha_0, t_1)\, \Phi_0(\alpha_0). \tag{9'}$$

Так построенная последовательность функций $u_{in}(x, t)$ (8) удовлетворяет уравнению (1') и условиям $u_{in}(x, t_0) = \Phi_0(x)$, $u_{in}(x'', t) = \varphi(t)$ $(t_0 < t < T')$ и по $s_i(t) = s_{in}(t) - u_{in}(x_i, t) = \varphi_0$ $(t_i < t \leqslant t_{i+1})$ по отрезкам $(x_i, t_i)(x_i, t_{i+1})$, параллельным OT, тогда как по отрезкам (x_i, t_{i+1}) (x_{i+1}, t_{i+1}) $u_{in}(x, t)$ принимает значения, которые не могут быть даны предварительно, а вытекают из самой задачи, именно, значения $u_{i-1,\, n}(x, t)$ по этому отрезку. Предельным переходом при $n \to \infty$ будем искать решение для данной кривой $s(t)$.

Положим в u_i (5) $i=0$. С помощью теоремы о среднем значении извлечем Φ_0 из интеграла (6) или (9′) и φ — из (7). Если M — максимальное значение функций $|\Phi_0(x)|$, $|\varphi_0|$, $|\varphi(t)|$, получим

$$|u_0(x, t)| < Mz(x, t), \quad z(x, t) = \int_{x_0}^{x''} \Gamma_0(x, \alpha, t)\, d\alpha -$$

$$-\frac{a^2}{l_0}\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{2l_0},\ \frac{a^2(\tau-t_0)}{l_0^2}\right) d\tau + \frac{a^2}{l_0}\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x}\left(\frac{x''-x}{2l_0},\ \frac{a^2(\tau-t_0)}{l_0^2}\right) d\tau. \quad (10)$$

Функция $z(x, t)$ $(x_0 < x < x'',\ t > t_0)$ положительна. Она удовлетворяет (1′), начальному условию $z(x, t_0) = 1$ и условиям на концах $z(x_0, t) = 1$, $z(x'', t) = 1$, следовательно, $z(x, t) \equiv 1$, и из (10) $|u_0(x, t)| < M$. Так же из (5) или (8) для $i=1$ получим $|u_1(x, t)| < M$ и т. д. до $|u_{in}(x, t)| < M$ для всех n, т. е. *последовательность* $u_{in}(x, t)$ *ограничена* при $n \to \infty$.

Почти очевидно, что функции $u_{in}(x, t)$ удовлетворяют (1′) в области D $(t_0 < t < T',\ s_{in}(t) < x < x'')$, так как они составлены из решений (1′), определенных в различных полосах плоскости (x, t). Но и непосредственными вычислениями проверяется, что функции $u_{i-1,\,n}(x, t)$ и $u_{in}(x, t)$ имеют по прямой $t = t_i$ непрерывные последовательные производные по x и t, следовательно, *функции* $u_{in}(x, t)$ *удовлетворяют* (1′) *в области* D *для каждого* n.

Теперь установим, что предел функции u_{in} $(n \to \infty)$ существует и не зависит от выбора моментов t_i. Для этого выберем вторую систему моментов t_i' $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, которым соответствует ломаная $s_{in}'(t)$ и последовательность функций $u_{in}'(x, t)$. Образуем функцию $\bar{u}_{in} = u_{in} - u_{in}'$. Пусть C_1 и C_2 — две соседние непрерывные кривые в плоскости (x, t), проходящие через точки (x_0, t_0) и (x'', T') и заключающие между собой кривые s_{in}, s_{in}', s. В области D_1, ограниченной прямыми $p_1 \equiv t = t_0$, $q \equiv x = x''$, $p_2 \equiv t = T'$ и кривой C_1, напишем для функции $\bar{u}_{in}(x, t)$ одну из теорем Грина ([5], стр. 261):

$$2\iint_{D_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\, dt = \int_C u^2\, dx + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\, dt = I_C, \quad (11)$$

где C — контур D_1. Так как $\bar{u}_{in}$ обращается в нуль по p_1 и q, $I_{p_1} = I_q = 0$ а $I_{p_2} = -\int_{p_2} \bar{u}_{in}^2\, dx$. Функции u_{in} и u_{in}' принимают по s_{in}, соотв. s_{in}', значения, равные нулю или малым величинам, следовательно, значения $\bar{u}_{in}$ по C_1 и C_2 малы. Из (11) следует

$$2\iint_{D_1}\left(\frac{\partial \bar{u}_{in}}{\partial x}\right)^2 dx\, dt + \int_{p_2} \bar{u}_{in}^2\, dx < \delta, \quad (12)$$

где $\delta \to 0$, когда $C_1 \to C_2$, т. е., когда $n \to \infty$ и все $\Delta t_i \to 0$ одновременно имеем $\bar{u}_{in} \to 0$ или $u_{in} \to u_{in}'$. По теореме Коши отсюда следует, что *последовательность* u_{in} *имеет предел* $u(x, t)$. А так как поставленная задача имеет, как известно ([5]), одно решение, $u(x, t)$ является этим решением.

Теперь вернемся к задаче Стефана (1)—(4). Разобьем снова интервал $T(t_0,\ t_0 + T)$, в котором изучаем процесс, на n частей, соответствующих моментам t_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Если функция s_{in} известна, то решения $u_{in}^{(1)}$ (1) и $u_{in}^{(2)}$ (1′) при условиях (2), (3) построим при помощи вспомогательной задачи. Функцию s_{in} построим при помощи (4).

Для интервала времени Δt_p заменим (4) выражением

$$\frac{ds}{dt} = e\left(k_1 \frac{\partial u_{pn}^{(1)}}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_{pn}^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=s\,(t_p)}. \tag{13}$$

Правая сторона (13) будет для $p=0$ известной функцией t, так как из (5) имеем $u_{0n}^{(1)}$ и $u_{0n}^{(2)}$, и (13) интегрируется непосредственно. Суммируя после интегрирования равенства (13) для $p = 0, 1, 2, \ldots, i$, получим $(s\,(t_i) = s_{in}\,(t_i))$

$$s\,(t_{i+1}) - s\,(t_0) = \sum_{p=0}^{i} (s\,(t_{p+1}) - s\,(t_p)) =$$

$$= \sum_{p=0}^{i} e \int_{t_p}^{t_{p+1}} \left(k_1 \frac{\partial u_{pn}^{(1)}}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_{pn}^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=s\,(t_p)} dt. \tag{14}$$

Когда $n \to \infty$, $\Delta t_i \to 0$, условие (13) становится идентичным условию (4), и (14) превращается в его решение, так что пределы найденных последовательностей $s_{in}\,(t), u_{in}^{(1)}\,(x,\ t),\ u_{in}^{(2)}\,(x, t)$, если существуют, дадут решение поставленной задачи.

Существование пределов следует из одной леммы, которую мы приведем без доказательств. Доказательство дано подробно в ([4]), где $l_1 = l_2 = \infty$, в случае, когда вводимые ниже кривые E_1 и E_2 принадлежат семействам парабол, но обобщается для более сложных кривых, а также и для настоящего случая, где l_1 и l_2 конечны.

Лемма. *Пусть $u\,(x, t)$ $(0 < t, 0 < x < l)$ — температура стержня $A\,(O_1O_2)$, $O_1\,(x=0)$, $O_2\,(x=l)$, и E_1, E_2, F — данные кривые:*

$$E_1 \equiv x = s_1\,(t), \quad E_2 \equiv x = s_2\,(t), \quad F \equiv x = l + \sigma\,(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \tau),$$
$$s_1\,(0) = s_2\,(0) = \sigma\,(0) = 0,$$

где $s_1, s_2, \sigma, s_1', s_2', \sigma'$ — непрерывные функции, τ — малый интервал времени.

Рассмотрим два решения u_1 и u_2 уравнения теплопроводности в A, определенные условиями $u_1\,(x, 0) = u_2\,(x, 0) = \Phi\,(x) > 0$ $(0 < x < l)$, $u_1\,[s_1\,(t), t] = 0$, $u_1\,[l + \sigma\,(t), t] = 0$, $u_2\,[s_2\,(t), t] = 0$, $u_2\,[l + \sigma\,(t), t] = 0$. Для криволинейного интеграла $Q\,(t) = \int\limits_0^t \frac{\partial u}{\partial x}\,dt$ по E_1 и E_2, который пропорционален количеству тепла, протекшему из конца O_1, имеем $Q_1\,(t) < Q_2\,(t)$, если $s_1\,(t) < s_2\,(t)$, где Q_1 и Q_2 — значения Q по E_1 (решение u_1) и E_2 (решение u_2). Если $s_1 > s_2$, то $Q_1 > Q_2$.

Из этой леммы следует единственность решения задачи Стефана. Из леммы получаем также, используя теоремы Коши, что последовательности $s_{in}, u_{in}^{(1)}, u_{in}^{(2)}$ стремятся к пределам $s\,(t)$, $u^{(1)}\,(x, t)$, $u^{(2)}\,(x, t)$, которых достигают и которые дают решение задачи.

Из найденного решения получается легко частный случай, когда, например, $l_2 \to \infty$, l_1 конечно (предельное условие (2) для $u^{(2)}$ отпадает). Тогда Γ_i (6') $(l_{2i} = \infty)$ делается идентичным формуле E_i (8') из ([4]), а из (7) $W_i^{(2)} = 0$. Повторение предыдущих вычислений для этого случая не встречает никаких затруднений. Также получим легко частный случай $l_1 = l_2 = \infty$ и придем к решению, данному в ([3]) и ([4]).

Поступило
8 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Stefan, Sitz. Ber. Akad. Wiss., Wien (1889). [2] Л. И. Рубинштейн, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 11, № 1 (1947). [3] А. Б. Дацев, ДАН, 58, № 4 (1947). [4] A. Datzeff, Ann. de L'Univ. de Sofia, 45, I, 1 (1948/49). [5] Е. Гурса, Курс матем. анализа, 3, М., 1933. [6] G. Doetsch, Die Laplace Transformation, Berlin, 1937.