Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. С. УФЛЯНД

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛИТ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 11 VII 1950)

Задача об изгибе упругой тонкой плиты сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u = q, \tag{1}$$

где $u = Dw$ (w — прогиб плиты, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость), q — внешняя нагрузка.

В случае прямоугольной плиты точное решение задачи в тригонометрических рядах получено лишь для одного типа краевых условий, а именно, для того случая, когда две противоположные стороны плиты свободно оперты (см., например, [1]). Аналогично, для секториальной плиты Б. Г. Галеркиным [2] дано точное решение задачи изгиба в том случае, когда радиальные части контура свободно оперты. Если же две противоположные стороны прямоугольной плиты (соответственно, прямолинейные части контура секториальной плиты) не свободно оперты, а устроены иным образом, то решение значительно усложняется. Так, в случае закрепленных двух противоположных сторон можно точное решение задачи свести к некоторому интегральному уравнению (см. [3, 4]).

В настоящей заметке рассматривается прямоугольная плита, у которой одна сторона, например $x = 0$, закреплена, а ей противоположная ($x = a$) свободно оперта, причем прочие стороны могут быть устроены как угодно*.

Чтобы точно удовлетворить граничным условиям на кромке $x = a$, ищем решение задачи в таком виде:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(y) \cos \alpha_n x \quad \left(\alpha_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{a}\right). \tag{2}$$

При этом, действительно, $u(a, y) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=a} = 0$. Однако выражение (2) удовлетворяет, кроме того, еще условию $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, т. е. одному из условий закрепления на кромке $x = 0$. Чтобы удовлетворить второму условию $u|_{x=0} = 0$, приходится приложить по кромке $x = 0$ некоторую распределенную нагрузку $f(y)$.

* В конце работы указывается на соответствующую аналогию для секториальных плит.

Подставляя (2) в (1) и разлагая внешнюю нагрузку $q(x, y)$ и $f(y)$ в соответствующий тригонометрический ряд, получаем для функций $u_n(y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, общий интеграл которого содержит четыре произвольные постоянные, которыми можно распорядиться так, чтобы точно удовлетворить любым краевым условиям на сторонах $y = 0$ и $y = b$. Полученное таким способом решение будет точно удовлетворять семи граничным условиям из восьми.

Если теперь попытаться удовлетворить оставшемуся условию $u|_{x=0} = 0$, то мы придем к некоторому интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f(y)$:

$$\int_0^b f(t) K(y, t)\, dt + \int_0^y f(t) M(y, t)\, dt = -F(0, y). \tag{3}$$

Ядра $K(y, t)$ и $M(y, t)$ этого уравнения представляются некоторыми бесконечными рядами, зависящими только от граничных условий при $y = 0$ и $y = b$, но не от внешней нагрузки $q(x, y)$; от последней зависит лишь свободный член $F(0, y)$.

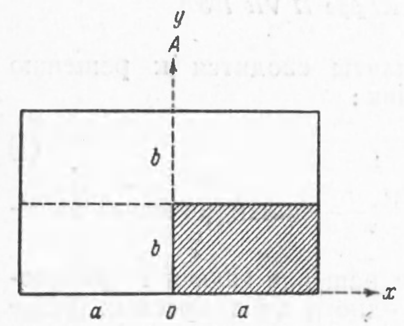

Рис. 1

Если в результате решения уравнения (3) функция $f(y)$ найдена, то прогиб u выражается через нее квадратурами.

Способ эффективного приближенного решения интегральных уравнений типа (3) указан в работе ([3]).

В качестве примера рассмотрим неразрезную прямоугольную плиту, свободно опертую по контуру, а также по средним линиям ($x = 0$ и $y = b$, рис. 1). Если, кроме того, и нагрузка $q(x, y)$ симметрична относительно этих средних линий, то кромки $x = 0$ и $y = b$ будут находиться в условиях закрепления, и достаточно решить задачу изгиба для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ при следующих граничных условиях:

$$u|_{x=0} = 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u\Big|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=a} = 0, \tag{5}$$

$$u\Big|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{6}$$

Согласно сказанному выше, условия (5) будут выполнены, если искать решение в форме (2). Условия (6) совпадают с соответствующими граничными условиями задачи, рассмотренной в нашей работе ([5]). Поэтому интегральное уравнение для функции $f(y)$ будет иметь совершенно тот же вид, что и уравнение (7) указанной работы, с той только разницей, что величина α_n имеет другое значение $\left(\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{a}\text{ вместо }\frac{n\pi}{a}\right)$. Это же утверждение касается и всех приближенных формул, полученных в работе ([5]).

В заключение отметим, что предложенная методика без труда распространяется на секториальные плиты ($0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$), у которых один радиус (скажем, $\theta = 0$) закреплен, а другой ($\theta = \gamma$) свободно оперт.

Решение ищется в виде

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi\theta}{\gamma}, \tag{7}$$

причем функции $u_n(r)$ определяются из дифференциального уравнения (1), произвольных граничных условий при $r = R$, а также из условий конечности u и $\partial u / \partial r$ при $r = 0$.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
7 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Ф. Папкович, Строительная механика корабля, ч. II, 1941. [2] Б. Г. Галеркин, Упругие тонкие плиты, 1933. [3] Г. А. Гринберг и Я. С. Уфлянд, Прикладн. матем. и мех., **13**, № 4, 413 (1949). [4] Я. С. Уфлянд, ДАН, **72**, № 2 (1950). [5] Я. С. Уфлянд, ДАН, **72**, № 4 (1950).