Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. Я. БЯЛЕР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОРОДЕ ВОКРУГ ТРЕХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАКРЕПЛЕННЫХ ВЫРАБОТОК

(Представлено академиком А. Н. Динником 20 VII 1950)

Для определения напряжений в породе и обделке рассмотрим бесконечную пластинку, ослабленную тремя отверстиями, в которые впаяны или вставлены шайбы из другого материала (см. рис. 1).

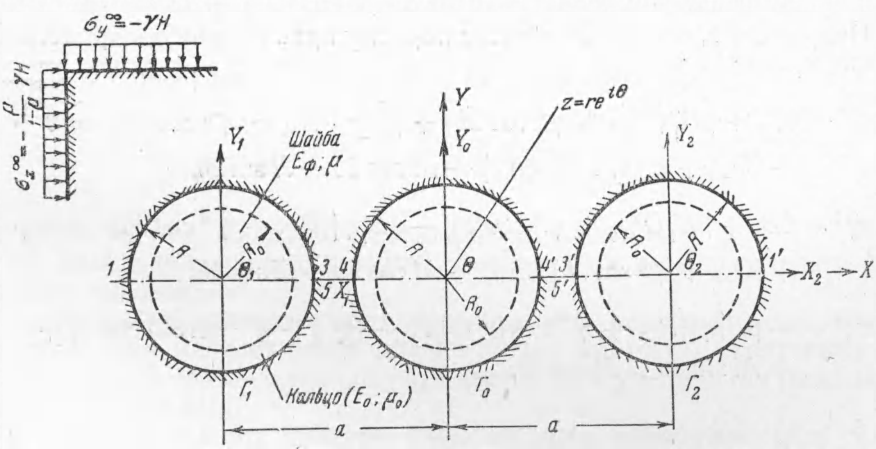

Рис. 1

Решаем эту задачу методом последовательных приближений, который разработан С. Л. Соболевым и С. Г. Михлиным.

На бесконечности приложены напряжения:

$$\sigma_x^\infty = -k\gamma H = -\frac{\mu}{1-\mu}\gamma H; \quad \sigma_y^\infty = -\gamma H; \quad \tau^\infty = 0,$$

где H — глубина заложения выработки от дневной поверхности, γ — объемный вес горных пород, μ — коэффициент Пуассона.

Определим функции напряжений для каждой шайбы и окружающей породы при условии, что два другие отверстия отсутствуют, а на бесконечности действуют напряжения втрое меньшие, чем основные,

$$B_1 = {}^1/_3 B; \quad B_1' = {}^1/_3 B',$$

где $B = {}^1/_4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)$; $B' = {}^1/_2(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)$.

Для области с отверстием Γ_j ($j = 0, 1, 2$), подкрепленным упругой шайбой при отсутствии остальных отверстий, функции напряжений $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будут:

$$\varphi_{1,j}(z_j) = B_1 z_j - B'_1 \frac{\beta}{2} \frac{R^2}{z_j}, \quad \psi_{1,j}(z_j) = B'_1 z_j - 2B_1 \alpha \frac{R^2}{z_j} + \delta B'_1 \frac{R^4}{z_j^3},$$

где $z_j = x_j + iy_j$ ($j = 0, 1, 2$). Коэффициенты α, β и δ определяются из контурных условий, создаваемых способами возведения обделки.

При приведении к осям X, Y (оси X, Y считаем совпадающими с осями X_0, Y_0, см. рис. 1) воспользуемся формулами:

$$\varphi_1(z) = \varphi_{1,1}(z-a) + \varphi_{1,0}(z) + \varphi_{1,2}(z+a),$$

$$\psi_1(z) = \psi_{1,1}(z-a) + \psi_{1,0}(z) + \psi_{1,2}(z+a) + a\left[\varphi'_{1,1}(z-a) - \varphi'_{1,2}(z+a)\right].$$

В результате получим функции напряжений первого приближения:

$$\varphi_1(z) = 3B_1 z - \frac{\beta}{2} B'_1 R\left(\omega_{-1} + \frac{R}{z}\right),$$

$$\psi_1(z) = 3B'_1 z - 2\alpha B_1 R\left(\omega_{-1} + \frac{R}{z}\right) + \frac{\beta}{2} B'_1 R q \omega_{-2} + \delta B'_1 R\left(\omega_{-3} + \frac{R^3}{z^3}\right).$$

Напряжения, соответствующие первому приближению, определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= 6B_1 + \beta B'_1 (P_{+2} + \eta^{-2}\cos 2\theta) + \beta B'_1 \eta\,[(P_{-3} + \eta^{-3}\cos 3\theta)\cos\theta + \\
&\quad + (Q_{-3} + \eta^{-3}\sin 3\theta)\sin\theta] - M\cos 2\theta - Л\sin 2\theta, \\
\sigma_\theta^{(1)} &= 6B_1 + \beta B'_1 (P_{+2} + \eta^{-2}\cos 2\theta) - \beta B'_1 \eta\,[(P_{-3} + \eta^{-3}\cos 3\theta)\cos\theta + \\
&\quad + (Q_{-3} + \eta^{-3}\sin 3\theta)\sin\theta] + M\cos 2\theta + Л\sin 2\theta, \qquad (1) \\
\tau^{(1)} &= -\beta B'_1 \eta\,[(P_{-3} + \eta^{-3}\cos 3\theta)\sin\theta - (Q_{-3} + \eta^{-3}\sin 3\theta)\cos\theta] + \\
&\quad + M\sin 2\theta - Л\cos 2\theta,
\end{aligned}$$

где

$$M = 3B'_1 + 2\alpha B_1 (P_{+2} + \eta^{-2}\cos 2\theta) - qB'_1 \beta P_{+3} - 3\delta B'_1 (P_{+4} + \eta^{-4}\cos 4\theta),$$

$$Л = 2\alpha B_1 (Q_{+2} + \eta^{-2}\sin 2\theta) - qB'_1 \beta Q_{+3} - 3\delta B'_1 (Q_{+4} + \eta^{-4}\sin 4\theta).$$

Полагая здесь $\beta = 2$, $\alpha = 1$ и $\delta = -1$, получим формулы, совпадающие с формулами для задачи с неподкрепленными тремя отверстиями.

При определении второго приближения по этому методу необходимо ввести некоторые упрощения, так как наличие материала, заполняющего отверстия, значительно осложняет задачу. Приведем здесь следующее рассуждение относительно влияния материала шайбы на второе приближение. С увеличением расстояния между отверстиями (в пределе $a \to \infty$) влияние материала эквивалентной шайбы в формулах второго приближения является второстепенным по сравнению с членами, имеющими множитель $(R/a)^2$. В самом деле, по соображениям теории размерности второе приближение может быть записано в следующем виде:

$$\sigma_r^{(2)}{}_{\text{с шайбой}} - \sigma_r^{(2)}{}_{\text{без шайбы}} = \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{G_{ф}}{G} f\left(\frac{\sigma^\infty}{G}, \frac{R}{a}, \frac{G_{ф}}{G}\right)\sigma^\infty.$$

Это говорит о том, что влияние эквивалентной шайбы — величина второго порядка малости по сравнению с величинами, учитывающими характер распределения отверстий. Кроме того, материал эквивалентной шайбы значительно слабее материала обделки, что указывает на незначительное влияние шайбы во втором приближении. Отсюда можно сделать вывод, что с достаточной для практики точностью можно во втором приближении не учитывать наличия материала, заполняющего отверстия, а ограничиваться учетом материала шайбы только в первом приближении. Это сводится к тому, что формулы для напряжений рассматриваемой задачи в результате двух приближений можно записать в виде:

$$\sigma_r = \sigma_r^{(1)} - \sigma_r^{(2)}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^{(1)} - \sigma_\theta^{(2)}, \quad \tau = \tau^{(1)} - \tau^{(2)},$$

где напряжения первого приближения $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_\theta^{(1)}$ и $\tau^{(1)}$ берем по формулам (1), учитывающим материал шайбы, а напряжения второго приближения по формулам, не учитывающим влияния материала шайбы, которые можно записать следующим образом:

$$\sigma_r^{(2)} = Ж - \frac{\eta}{q}(A\cos\theta + Б\sin\theta) - Ш\cos 2\theta - Щ\sin 2\theta,$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = Ж + \frac{\eta}{q}(A\cos\theta + Б\sin\theta) + Ш\cos 2\theta + Щ\sin 2\theta,$$

$$\tau^{(2)} = \frac{\eta}{q}(A\sin\theta - Б\cos\theta) + Ш\sin 2\theta - Щ\cos 2\theta,$$

$$\eta = \frac{r}{R}, \qquad q = \frac{a}{R},$$

где $Ж$, A, $Б$, $Ш$, $Щ$, P, Q — специальные функции.

На основании произведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Метод последовательных приближений решения задач теории упругости для многосвязных областей дает хорошую сходимость.

Сходимость данного метода улучшается при увеличения расстояний между выработками.

2. Напряжения на контуре параллельных выработок (для точек *1*, *3* и *4*) практически не зависят от соотношения a/R, приближаясь при этом по величине к контурным напряжениям для одного отверстия.

3. Напряжения в породе целика зависят от соотношения a/R.

4. При размере целика свыше 3,0 диаметров выработки напряжения в породе можно определить из условия одного отверстия, так как напряжения в центре целика почти будут равны давлению породы в ненарушенном массиве.

Поступило
5 VII 1950