Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

МЕХАНИКА

Б. С. КОВАЛЬСКИЙ

ТЕОРИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ НАВИВКИ КАНАТА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 18 VII 1950)

Пусть $T(R, r)$ — натяжение каната в слое r при внешнем радиусе навивки R (рис. 1). При $R=r$ натяжение $T(r, r)$ определяется весом груза и собственным весом свисающего конца каната и, таким образом, является функцией r; пусть $T(r, r)=T_0(r)$.

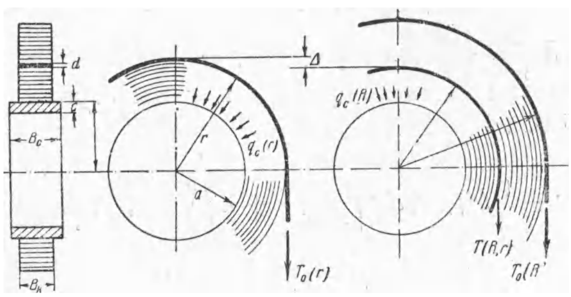

Рис. 1

После навивки слоя rR ранее навитый слой ar и сердечник (бобина, барабан) получают дополнительно обжатие Δ — радиус витка r уменьшается и, соответственно, натяжение в канате падает от $T_0(r)$ до $T(R, r)$. Если E_kF_k — жесткость каната на растяжение, то

$$\Delta=\frac{r}{E_kF_k}\left[T_0(r)-T(R, r)\right],$$

или

$$\Delta=\frac{\rho a d}{E_kF_k}\left[t_0(\rho)-t(\eta, \rho)\right], \tag{1}$$

где $\eta=R/a$, $\rho=r/a$, $t(\eta, \rho)=T(R, r)/d$, $t_0(\rho)=T_0(r)/d$, а d — толщина каната.

Радиальное давление в слое r от натяжения витков слоя rR равно

$$q=\frac{1}{r}\int_r^R t(\eta, \rho)\,dr=\frac{1}{\rho}\int_\rho^\eta t(\eta, x)\,dx.$$

Обозначая через K „модуль поперечного сжатия каната“ под влиянием радиальной нагрузки q, находим радиальное сжатие слоя ar при навивке слоя rR:

$$\Delta_\eta=\frac{1}{B_k}\int_a^r\frac{q\,dr}{K}=\frac{a}{B_k}\int_1^\rho\frac{dx}{xK}\int_x^\eta t(\eta, x)\,dx.$$

При $\eta=\rho$ имеем

$$\Delta_\rho=\frac{a}{B_k}\int_1^\rho\frac{dx}{xK}\int_x^\rho t(\rho, x)\,dx,$$

следовательно, навивка слоя rR вызывает обжатие слоя ar на

$$\Delta_k = \Delta_\eta - \Delta_\rho = \frac{a}{B_k}\int_1^\rho \left[\int_x^\eta t(\eta, x)\,dx - \int_x^\rho t(\rho, x)\,dx\right]\frac{dx}{xK}. \tag{2}$$

Изменение радиуса сердечника при навивке слоя rR определяется выражением

$$\Delta_c = \frac{ka^2}{E_c B_c c}\left[\int_1^\eta t(\eta, x)\,dx - \int_1^\rho t(\rho, x)\,dx\right], \tag{3}$$

где

$$k = \frac{1-\mu+(1+\mu)(1-c/a)^2}{2-c/a}.$$

Подставляя $\Delta = \Delta_k + \Delta_c$ в (1) и вводя обозначения $\omega^2 = \frac{\gamma E_k}{K}$, $\lambda = \frac{\gamma E_k B_k k R}{E_c B_c c} = k\frac{E_k F_k}{E_c F_c}\frac{R}{d}$, в которых γ — коэффициент металлического заполнения сечения каната, приходим к интегральному уравнению относительно $t(\eta, \rho)$;

$$\int_1^\rho \left[\int_x^\eta t(\eta, x)\,dx - \int_x^\rho t(\rho, x)\,dx\right]\frac{\omega^2 dx}{x} + \lambda\left[\int_1^\eta t(\eta, x)\,dx - \int_1^\rho t(\rho, x)\,dx\right] = \rho\,[t_0(\rho) - t(\eta, \rho)]. \tag{4}$$

В общем случае, поскольку K зависит от $t(\eta, \rho)$ и $q(\eta, \rho)$, имеем $\omega = \omega(t, q)$ — решение может быть получено путем последовательных приближений. Оперируя же с некоторым усредненным значением $\omega = \mathrm{const}$ (различным для канатов разных конструкций), уравнение (4) можно привести к более простому уравнению относительно $\varphi(\rho) = \frac{\partial}{\partial\eta} t(\eta, \rho)$:

$$\omega^2\int_1^\rho \left[t_0(\eta) + \int_x^\eta \varphi(x)\,dx\right]\frac{dx}{x} + \lambda\left[t_0(\eta) + \int_1^\eta \varphi(x)\,dx\right] = -\rho\varphi(\rho). \tag{5}$$

Решение (5) имеем в виде

$$\varphi(\rho) = \frac{\partial}{\partial\eta} t(\eta, \rho) = -\omega t_0(\eta)\frac{\rho^{\omega-1} - \beta\rho^{-\omega-1}}{\eta^\omega + \beta\eta^{-\omega}}, \quad \beta = \frac{\omega-\lambda}{\omega+\lambda},$$

откуда непосредственно следует

$$t(\eta, \rho) = t_0(\rho) - (\rho^{\omega-1} - \beta\rho^{-\omega-1})\int_\rho^\eta \frac{\omega t_0(x)\,dx}{x^\omega + \beta x^{-\omega}}. \tag{6}$$

Если закон $t_0(\rho)$ известен (например, для случая бобинного подъема $t_0(\rho) = A - \beta\rho^2$), то вычисление $t(\eta, \rho)$ по (6) затруднений не представляет. На рис. 2 приведены графики $t(\eta, \rho)$ при $\eta = 2$, $\omega = 10$ и 20, $\lambda = 3$ и $t_0(\rho) = 6950 - 1000\ \rho^2$ (вес клетки с грузом 5000 кг, вес каната 5100 кг, канат 106×17 мм, число витков 83, $a = 140$ см, $R = 280$ см). Как видим, упругая податливость каната и сердечника значительно снижает натяжение витков каната (при этом мы допускаем, что для витков, работающих на сжатие, модуль упругости E_k сохраняет свое значение).

Получив закон изменения натяжения в витках каната (6), находим радиальную нагрузку сердечника

$$q_c = \frac{1}{a}\int_a^R t(\eta, \rho)\, dr = \int_1^\eta t(\eta, \rho)\, d\rho =$$

$$= \int_1^\eta \left\{ t_0(\rho) - (\rho^{\omega-1} - \beta\rho^{-\omega-1}) \int_\rho^\eta \frac{\omega t_0(x)\, dx}{x^\omega + \beta x^{-\omega}} \right\} d\rho = (1+\beta)\int_1^\eta \frac{t_0(x)\, dx}{x^\omega + \beta x^{-\omega}}, \quad (7)$$

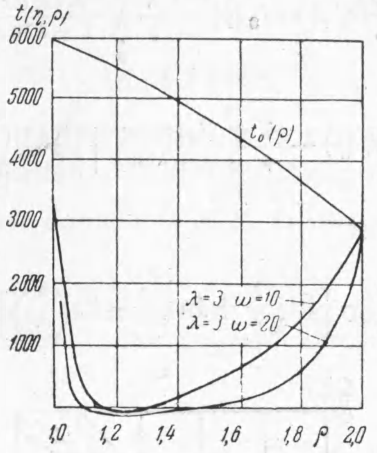

Рис. 2

или — в виде, более удобном для вычислений, — в виде быстро сходящегося ряда:

$$q_c = (1+\beta)\int_1^\eta \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^{k-1}\, t_0(x)\, x^{-(2k-1)\omega}\, dx =$$

$$= (1+\beta)\sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^{k-1}\int_1^\eta t_0(x)\, x^{-(2k-1)\omega}\, dx. \quad (8)$$

В частном случае $t_0(\rho) = t_0 = \text{const}$ выражение (8) переходит в

$$q_c = t_0(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{(2k+1)\omega - 1}\left(1 - \eta^{-(2k+1)\omega+1}\right). \quad (9)$$

В практических расчетах при не малых ω и η вместо (9) с большой точностью можно пользоваться его асимптотическим значением

$$q_c = t_0(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{(2k+1)\omega - 1}. \quad (10)$$

Удельная нагрузка $p = q_c / B_k$ бобины в случае, представленном на рис. 2, при $\omega = \lambda = 0$ оказывается равной 435 кг/см², учет же поперечных деформаций каната и сжатия бобины ($\omega = 20$, $\lambda = 3$) дает $p = 50$ кг/см².

Анализ полученного решения указывает на большую эффективность учета поперечных деформаций каната под влиянием поперечной нагрузки (изменения диаметра каната вследствие изменения его натяжения не учитываем, так как этот момент имеет много меньшее значение, чем влияние поперечной нагрузки). Оценку этого эффекта дает сравнение со случаем $\omega = 0$ ($K = \infty$), когда (4) переходит в уравнение

$$\int_1^{\eta} t(\eta, x)\,dx - \int_1^{\rho} t_0(\rho, x)\,dx = \frac{\rho}{\lambda}\,[t_0(\rho) - t(\eta, \rho)], \tag{11}$$

решение которого

$$t(\eta, \rho) = t_0(\rho) - \frac{\lambda}{\rho} \int_{\rho}^{\eta} \frac{t_0(x)\,dx}{1 + \lambda \ln x} \tag{12}$$

дает

$$q_c = \int_1^{\eta} \left[t_0(\rho) - \frac{\lambda}{\rho} \int_{\rho}^{\eta} \frac{t_0(x)\,dx}{1 + \lambda \ln x} \right] d\rho = \int_1^{\eta} \frac{t_0(\rho)\,d\rho}{1 + \lambda \ln \rho}, \tag{13}$$

а при $t_0(\rho) = t_0 = \text{const}$

$$q_c = t_0 \int_1^{\eta} \frac{d\rho}{1 + \lambda \ln \rho} = \frac{t_0}{\lambda e^{1/\lambda}} \left[\mathrm{Ei}\left(\frac{1}{\lambda} + \ln \eta\right) - \mathrm{Ei}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], \quad \mathrm{Ei}\,x = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u\,du}{u}. \tag{14}$$

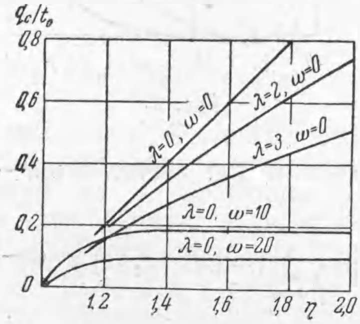

Рис. 3

Сравнительные подсчеты q_c по (9) при $\lambda = 0$, $\omega = 10$ и по (14) при $\lambda = 2$ и 3, $\omega = 0$ приведены на рис. 3. Там же нанесена прямолинейная зависимость для случая навивки неподатливого в поперечном направлении каната на абсолютно жесткий сердечник ($\omega = \lambda = 0$).

В случае многослойной навивки круглого каната натяжение витков в каждом из слоев не является одинаковым, однако неравномерность натяжения витков вообще невелика и все полученные выше зависимости могут быть использованы также и в этом случае.

Поступило
17 V 1950