Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ПРОЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ НАД КВАТЕРНИОНАМИ И ПСЕВДОКВАТЕРНИОНАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 VII 1950)

В заметке ([1]) мы показали, что вещественная симплектическая геометрия тесно связана с проективной геометрией над псевдокватернионами. В настоящей заметке мы выявим некоторые характерные свойства проективных геометрий над кватернионами и псевдокватернионами и найдем новые связи между ними и вещественными геометриями.

Как известно, кватернионами называются выражения вида $a+bi+cj+dk$, где a, b, c, d — вещественные числа, а элементы i, j, k удовлетворяют условиям $i^2=j^2=-1$, $ij=-ji=k$, а псевдокватернионами называются выражения вида $a+bi+ce+df$, где a, b, c, d — вещественные числа, а элементы i, e, f удовлетворяют условиям $i^2=-1$, $e^2=+1$, $ie=-ei=f$. Кватернионы составляют тело, изоморфное кольцу комплексных матриц 2-го порядка вида $\begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$; псевдокватернионы составляют кольцо, не являющееся телом, изоморфное кольцу всех вещественных матриц 2-го порядка. Эти изоморфизмы могут быть установлены соответствиями

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+di & b+ci \\ -b+ci & a-di \end{pmatrix},$$
$$a+bi+ce+df \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ -b+c & a-d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Так как кватернионы составляют тело, а над каждым телом можно определить n-мерное проективное пространство как совокупность всех одномерных подпространств $(n+1)$-мерного линейного пространства над этим телом (см. ([2]), стр. 153), мы можем определить таким образом n-мерное проективное пространство над телом кватернионов. Будем обозначать n-мерное линейное пространство над телом кватернионов через $L_n(i, j)$, а n-мерное проективное пространство над этим телом через $P_n(i, j)$ (определение $L_n(i, j)$ см. ([3]), стр. 33).

Так как псевдокватернионы составляют кольцо, не являющееся телом, определение линейного и проективного пространств над этим кольцом несколько более сложно. Мы построим n-мерное линейное пространство над кольцом псевдокватернионов следующим образом: рассмотрим многообразие пар векторов $2n$-мерного вещественного линейного пространства L_{2n}. В этом многообразии можно определить сумму двух пар векторов x, y и z, w как пару векторов $x+z$, $y+w$ и произведение пары векторов x, y на псевдокватернион, представляемый матрицей 2-го порядка $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, как пару векторов $ax+by$, $cx+dy$. При этом: 1) пары векторов L_{2n} с определенным таким образом сложением образуют коммутативную группу; 2) умножение пар векторов на псевдокватернионы дистрибутивно относительно сложения векторов и сложения псевдокватернионов, ассоциативно относительно умножения псевдокватернионов, а умножение на псевдокватернион 1 является тождественным преобразованием; 3) существуют n таких пар векторов L_{2n}, что все пары векторов L_{2n} являются линейными комбинациями этих пар векторов в смысле определенного нами сложения и умножения на псевдокватернионы (такими парами являются пары векторов любого векторного базиса L_{2n}). Таким образом, многообразие пар векторов L_{2n} обладает свойствами n-мерного линейного пространства, причем роль скаляров здесь играют псевдокватернионы. Это дает нам основание называть многообразие пар векторов L_{2n} n-мерным линейным пространством над кольцом псевдокватернионов и обозначать это пространство $L_n(i, e)$.

Будем называть пару неколлинеарных векторов L_{2n} невырожденным вектором $L_n(i, e)$, а m пар векторов L_{2n}, состоящих из линейно независимых векторов, m линейно независимыми невырожденными векторами $L_n(i, e)$.

Если базис $L_n(i, e)$ состоит из пар базисных векторов e_i, e_{n+i} пространства L_{2n}, которые мы будем обозначать E_i, то пара векторов x, y пространства L_{2n}, рассматриваемая как вектор X пространства $L_n(i, e)$, имеет вид $X = \sum_i E_i X^i$ $\left(X^i = \begin{pmatrix} x^i & y^i \\ x^{n+i} & y^{n+i} \end{pmatrix} \right)$.

Линейные преобразования L_{2n} являются в то же время линейными преобразованиями $L_n(i, e)$ и обратно. При этом линейное преобразование $'x^I = \sum_J a^I_J x^J$ в L_{2n} является линейным преобразованием $'X^i = \sum_j A^i_j X^j$ $\left(A^i_j = \begin{pmatrix} a^i_j & a^i_{n+j} \\ a^{n+i}_j & a^{n+i}_{n+j} \end{pmatrix} \right)$ в $L_n(i, e)$. Отсюда видно, что в случае обратимой матрицы a^I_J столбцы и строки соответственной псевдокватернионной матрицы A^i_j представляют собой системы n линейно независимых векторов $P_n(i, j)$.

Будем называть m-мерным подпространством пространства $L_n(i, e)$ совокупность пар векторов L_{2n}, лежащих в одном $2m$-мерном подпространстве пространства L_{2n}; m-мерное подпространство пространства $L_n(i, e)$ является пространством $L_m(i, e)$. Векторы m-мерного подпространства пространства L_n (i, e) имеют вид $X = \sum_\alpha A_\alpha K^\alpha$, где A_α — m линейно независимых невырожденных векторов, K^α — m произвольных псевдокватернионов (при $m = 1$ $X = AK$).

Теперь мы можем определить n-мерное проективное пространство над кольцом псевдокватернионов как совокупность всех одномерных подпространств пространства $L_{n+1}(i, e)$. Будем обозначать определенное нами пространство через $P_n(i, e)$.

Будем называть элементы $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ точками, а кватернионы и псевдокватернионы X^i, служащие координатами векторов одномерного подпространства $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$, представляемого этой точкой, и поэтому определенные с точностью до преобразования $X^i \to X^i K$, где K — произвольный кватернион или псевдокватернион, будем называть однородными координатами точки X пространства $P_n(i, j)$ или $P_n(i, e)$.

Точка $P_n(i, j)$ определяется любыми своими однородными координатами, точка $P_n(i, e)$ определяется своими однородными координатами, являющимися координатами невырожденного вектора $L_{n+1}(i, e)$ (однородные координаты точки $P_n(i, e)$, являющиеся координатами вырожденного вектора $L_{n+1}(i, e)$, соответствуют множеству точек $P_n(i, e)$, зависящих от $2(n-1)$ вещественных параметров).

Будем называть $(m+1)$-мерные подпространства $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$ m-мерными плоскостями $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, при $m = 1$ — прямыми.

Будем называть группами коллинеаций пространств $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ группы преобразований, индуцируемых в этих пространствах, рассматриваемых как совокупности одномерных подпространств $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$, группами линейных преобразований $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$. *Группы коллинеаций $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ соответственно изоморфны фактор-группам групп линейных преобразований $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$ по их центрам*: эти центры состоят из преобразований $'X^i = kX^i$, где k — вещественное число; такие и только такие преобразования $L_{n+1}(i, j)$ и $L_{n+1}(i, e)$ переводят каждое одномерное подпространство в себя.

Пространства $L_n(i, j)$ и $L_n(i, e)$ можно отобразить в соответственные пространства $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, поставив в соответствие всякому вектору X пространств $L_n(i, j)$ и $L_n(i, e)$ с координатами X^i точки $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ с однородными координатами $X^0 = 1$, X^i. Точки $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, не являющиеся образами точек $L_n(i, j)$ и $L_n(i, e)$, определяются тем, что их координаты X^0 не обладают обратными элементами. Будем называть точки $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, у которых координаты X^0 равны 0, бесконечно удаленными элементами $L_n(i, j)$ и $L_n(i, e)$ при их дополнении до $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$, а точки $P_n(i, e)$, у которых координаты X^0 — отличные от 0 псевдокватернионы, не обладающие обратными элементами, будем называть идеальными элементами $L_n(i, e)$ при его дополнении до $P_n(i, e)$.

Применяемое нами определение пространства $P_n(i, e)$ отличается от определения проективных пространств над произвольными кольцами, применяемого Холлом ([4]), тем, что Холл определяет такое проективное пространство как соответственное линейное пространство, дополненное только бесконечно удаленными элементами (без идеальных элементов).

При применяемом нами определении точки $P_n(i, e)$ совершенно двойственны $(n-1)$-мерным плоскостям; в частности, всякие две прямые $P_2(i, e)$ во всех случаях пересекаются в одной точке (при определении $P_2(i, e)$, применяемом Холлом, две прямые, пересекающиеся в идеальной точке, считаются непересекающимися).

Как показал Рейдемейстер (([5]), стр. 137), всякие четыре точки, лежащие на одной прямой проективного пространства над телом, обладают инвариантом относительно группы коллинеаций этого пространства — двойным отношением этих точек, причем если однородные координаты этих точек имеют вид X^i, Y^i, $U^i = X^i + Y^iK$, $V^i = X^i + Y^iL$, их двойное отношенне равно

$$W(X, Y; U, V) = A^{-1}LK^{-1}A, \qquad (2)$$

где A — произвольный элемент данного тела.

Это определение целиком относится ко всяким четырем точкам, лежащим на одной прямой пространства $P_n(i, j)$. В том случае, когда четыре точки, лежащие на одной прямой пространства $P_n(i, e)$, могут быть определены однородными координатами вида $X^i, Y^i, U^i = X^i + Y^iK$, $V^i = X^i + Y^iL$, где псевдокватернион K обладает обратным элементом, эти точки обладают инвариантом относительно группы коллинеаций $P_n(i, e)$, который мы также будем называть двойным отношением. Двойное отношение 4 точек $P_n(i, e)$ определяется по той же формуле (2), что и в $P_n(i, j)$, причем A здесь — произвольный псевдокватернион, обладающий обратным элементом.

Пространство $P_n(i, e)$ можно взаимно однозначно отобразить на многообразие всех прямых вещественного пространства P_{2n+1}, причем группы коллинеаций пространств $P_n(i, e)$ и P_{2n+1} изоморфны.

При этом m-мерные плоскости $P_n(i, e)$ изображаются $(2m+1)$-мерными плоскостями P_{2n+1}.

Группы коллинеаций $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ являются некомпактными простыми группами Ли класса A. Группа коллинеаций $P_n(i, j)$ связна, группа $P_n(i, e)$ (как изоморфная ей группа коллинеаций вещественного P_{2n+1}) состоит из двух связных компонент.

Двойные отношения четверок точек на прямых $P_n(i, j)$ и $P_n(i, e)$ в силу (2) могут быть представлены матрицами (1) в нормальной форме. Этим нормальным формам соответствуют кватернионы вида $a+bi$ и псевдокватернионы видов $a+bi$, $a+be$ и $a+b(i+e)$. Поэтому двойные отношения в случае $P_n(i, j)$ можно считать комплексными числами, а в случае $P_n(i, e)$ можно считать комплексными числами, двойными числами $a+be$ $(e^2=+1)$ или дуальными числами $a+b\varepsilon$ $(\varepsilon^2=0)$.

Двойные отношения четверок точек на прямой $P_n(i, e)$ тесно связаны с проективными инвариантами четверок прямых в 3-мерных плоскостях вещественного P_{2n+1}. Четыре прямые P_3 в общем случае обладают двумя директрисами — прямыми, пересекающими все эти четыре прямые; если двойные отношения четверок точек, высекаемых нашими прямыми на директрисах, являются вещественными или комплексно-сопряженными числами W_1 и W_2, то эти числа равны собственным числам вещественной матрицы 2-го порядка, представляющей двойное отношение (2) соответственных 4 точек $P_1(i, e)$.

Вводя в вещественное P_{n+1} симплектическую геометрию, в которой две прямые обладают инвариантом, мы превратим пространство $P_n(i, e)$ в метрическое пространство $K_n(i, e)$ — одно из неевклидовых пространств, рассматривавшихся в нашей заметке ([1]).

Будем называть n-мерным конформным пространством C_n n-мерное евклидово пространство R_n, дополненное одной бесконечно удаленной точкой, причем основной группой пространства C_n служит группа конформных преобразований (группа точечных преобразований, переводящих сферы в сферы). Будем называть n-мерным псевдоконформным пространством индекса l ${}^lC_n$ n-мерное псевдоевклидово пространство индекса l ${}^lR_n$, дополненное одной бесконечно удаленной точкой и идеальным $(n-1)$-мерным конусом, причем основной группой пространства ${}^lC_n$ также служит группа точечных преобразований, переводящая сферы в сферы, которую мы также будем называть группой конформных преобразований.

Пространства $P_1(i, j)$ и $P_1(i, e)$ можно взаимно однозначно отобразить соответственно на пространства C_4 и ${}^2C_4$, причем группы коллинеаций $P_1(i, j)$ и $P_1(i, e)$ изоморфны группам конформных преобразований C_4 и ${}^2C_4$.

Так как пространство $P_1(i, e)$ можно взаимно-однозначно отобразить на многообразие всех прямых вещественного пространства P_3, причем группы коллинеаций $P_1(i, e)$ и P_3 изоморфны, мы получили снова известную мысль Картана о взаимно-однозначном отображении многообразия прямых P_3 на пространство ${}^2C_4$ и об изоморфизме групп проективных преобразований P_3 и конформных преобразований ${}^2C_4$ ([6], стр. 106—108).

Поступило
8 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Розенфельд, ДАН, 64, № 5 (1949). [2] Н. Джекобсон, Теория колец, М., 1947. [3] К. Шевалле, Теория групп Ли, М., 1948. [4] М. Hall, Trans. Am. Math. Soc., 54, 2, 229 (1943). [5] K. Reidemeister, Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, Berlin, 1930. [6] P. Mentré, Les variétés de l'espace réglé, Paris, 1923.