**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXIV, № 3**

*МАТЕМАТИКА*

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

# МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 VII 1950)*

Пусть в конечной области $\Omega$ изменения $X=(x_1, \ldots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и для $t \geqslant 0$ требуется найти решение гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-cu \equiv L(u), \quad c(X) \geqslant 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям $u|_{t=0}=\varphi_0(X)$, $u_t|_{t=0}=\varphi_1(X)$, $u|_\Gamma=0$. Следуя методу Фурье, решение $u$ ищется в виде ряда

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\lambda_k t+b_k \sin\lambda_k t)\, u_k(X), \tag{2}$$

где

$$L(u_k)=-\lambda_k^2 u_k, \quad u_k|_\Gamma=0, \quad H(u_k)=\int_\Omega u_k^2\, d\Omega=1,$$

$$D(u_k)=\int_\Omega\left\{\sum_{i,\, j=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+cu_k^2\right\} d\Omega=\lambda_k^2.$$

Предположим, что коэффициенты $a_{ij}(X)$ обладают в $\overline{\Omega}$ непрерывными производными по $x_i$ до порядка $\left[\frac{n}{2}\right]+3$, а $c(X)$ — до $\left[\frac{n}{2}\right]+2$. Кроме того, пусть $\varphi_0(X)$ и $\varphi_1(X)$ имеют непрерывные производные в $\overline{\Omega}$ до порядка $4\left[\frac{n}{4}\right]+6$, причем производные до порядка $4\left[\frac{n}{4}\right]+4$ для них обращаются в нуль на контуре $\Gamma$.

Метод конечных разностей и вариационный метод дают возможность определить решения уравнений $L(u)=f$ и $L(u)=\lambda u$ в классе функций $\overset{0}{D}$ (1). Этот класс функций получен как замыкание по норме $H(v)$ и $D(v)$ функций, равных нулю в контурной полоске, т. е. если $u \in \overset{0}{D}$, то существует такая последовательность гладких функций $u_N$, каждая из которых равна нулю в своей контурной полоске, что

$$\int_\Omega\left\{(u-u_N)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u_N}{\partial x_i}\right)^2\right\} d\Omega \to 0 \quad \text{при } N\to\infty.$$

В частности, функция Грина задачи Дирихле для оператора $L$ принадлежит классу $\overset{0}{D}$ при соответствующем сглаживании ее значений в полюсе и его окрестности.

Собственные функции $u_k$ внутри области $\Omega$ имеют непрерывные вторые производные. Нетрудно видеть, что если функции $v_1$ и $v_2$ принадлежат классу $\overset{0}{D}$, имеют непрерывные вторые производные внутри $\Omega$, а $L(v_1)$ и $L(v_2)$ суммируются со второй степенью по области $\Omega$, то

$$\int\limits_{\Omega} L(v_1)\, v_2\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} v_1\, L(v_2)\, d\Omega. \tag{3}$$

Беря за функции $v_1$ и $v_2$ функции $u_k$ и $G$, получим

$$u_k(p) = \lambda_k^2 \int\limits_{G} G(P, Q)\, u_k(Q)\, dQ. \tag{4}$$

Известно, что для функции $G$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant G(P, Q) \leqslant \frac{\varkappa_n}{\eta^{n-2}(P, Q)}, \tag{5}$$

когда $P,\ Q \in \Omega$.

Во всех регулярных ([2]) граничных точках* функция Грина непрерывна вплоть до контура и равна на контуре нулю. Отсюда и из (4) легко следует, что $u_k$ принимают нулевые значения во всех регулярных точках границы.

Для $\left[\frac{n}{4}\right] + 1$ раз итерированной функции Грина $G_{\left[\frac{n}{4}\right]+1}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(G_{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\right)^2 d\Omega \leqslant C_1^2.$$

Но

$$u_k = \lambda_k^2 \int\limits_{\Omega} G u_k\, d\Omega = \lambda_k^4 \int\limits_{\Omega} G_2 u_k\, d\Omega = \ldots = \lambda_k^{2\left[\frac{n}{4}\right]+2} \int\limits_{\Omega} G_{\left[\frac{n}{4}\right]+1} u_k\, d\Omega,$$

следовательно,

$$|u_k| \leqslant |\lambda_k|^{2\left[\frac{n}{4}\right]+2} \sqrt{\int\limits_{\Omega} G^2_{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\, d\Omega \cdot \int\limits_{\Omega} u_k^2\, d\Omega} \leqslant C_1 \lambda_k^{2\left[\frac{n}{4}\right]+2}.$$

Оценку первых и вторых производных для любой внутренней подобласти области $\Omega$ получаем с помощью теоремы вложения С. Л. Соболева и неравенства**

$$D_{\Omega'}(v) \leqslant C_2 \{H_{\Omega''}(v) + H_{\Omega''}(|v|,\ |L(v)|)\},$$

где $\Omega'$ есть строго внутренняя подобласть области $\Omega''$, справедливого для любой дважды дифференцируемой функции $v$. Таким путем получаем

$$\left| \frac{\partial^l u_k}{\partial x_i^{l_i}\, \partial x_j^{l_j}} \right| \leqslant C_3 |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+l}, \quad l = 1, 2.$$

---

* Доказано, что граничная точка регулярна для уравнения $L(u) = 0$ тогда и только тогда, когда она регулярна для уравнения $\Delta u = 0$.

** В случае, когда оператор $L$ совпадает с оператором Лапласа, это неравенство дано в работе ([3]).

Для коэффициентов $a_k$ и $b_k$ имеют место следующие равенства:

$$a_k = \int\limits_{\Omega} \varphi_0 u_k \, d\Omega = -\frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_{\Omega} \varphi_0 L(u_k) \, d\Omega = -\frac{1}{\lambda_k^2} \int\limits_{\Omega} L(\varphi_0) u_k \, d\Omega =$$

$$= (-1)^{2\left[\frac{n}{4}\right]+3} \frac{1}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+6}} \int\limits_{\Omega} L^{2\left[\frac{n}{4}\right]+3}(\varphi_0) u_k \, d\Omega = \frac{d_k}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+6}},$$

$$b_k = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_{\Omega} \varphi_1 u_k \, d\Omega = \frac{(-1)^{2\left[\frac{n}{4}\right]+3}}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+7}} \int\limits_{\Omega} L^{2\left[\frac{n}{4}\right]+3}(\varphi_1) u_k \, d\Omega = \frac{l_k}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+7}}.$$

Выполненное здесь интегрирование по частям в $\int\limits_{\Omega} \varphi_i L(u_k) \, d\Omega$ законно, несмотря на то, что поведение первых производных для $u_k$ на контуре $\Gamma$ неизвестно. Действительно, нетрудно доказать, что если функция $v$ непрерывна вплоть до контура $\Gamma$, внутри области $\Omega$ имеет непрерывные первые производные, $v|_{\Gamma} = 0$ и $D_{\Omega}(v) < \infty$, то функция $v$ принадлежит классу $\overset{0}{D}$.

Функции $L^s(\varphi_i)$, $s = 0, \ldots, 4\left[\frac{n}{4}\right] + 4$, принадлежат, в силу этой теоремы, к классу $\overset{0}{D}$. Но тогда для функций $L^s(\varphi_i)$ и $u_k$ справедливо равенство (3).

Вследствие суммируемости $G_{\left[\frac{n}{4}\right]+1}$ со второй степенью по области $\Omega$ ряд, составленный из обратных величин квадратов его собственных чисел, сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+4}} < \infty.$$

Теперь нетрудно получить равномерную сходимость в замкнутой области $\overline{\Omega}$ ряда (2) и равномерную в любой внутренней подобласти $\Omega'$ области $\Omega$ сходимость рядов, полученных почленным дифференцированием ряда (2) по $x_i$ и $t$ до двух раз включительно. Действительно,

$$\left\{ \sum_{k=m}^{m+p} (|a_k| + |b_k|) \lambda_k^2 |u_k| \right\}^2 \leqslant \left\{ C_1 \sum_{k=m}^{m+p} \frac{|d_k| + |e_k|}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+6}} \lambda_k^{2\left[\frac{n}{4}\right]+4} \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1^2 \sum_{k=m}^{m+p} \frac{1}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+4}} \cdot \sum_{k=m}^{m+p} (d_k^2 + e_k^2) \to 0 \quad \text{при } m, p \to \infty.$$

Аналогично,

$$\left\{ \sum_{k=m}^{m+p} (|a_k| + |b_k|) \left| \frac{\partial^l u_k}{\partial x_i^{l_i} \partial x_j^{l_j}} \right| \right\}^2 \leqslant \left\{ C_3 \sum_{k=m}^{m+p} \frac{|d_k| + |e_k|}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+6}} \lambda_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3} \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3^2 \sum_{k=m}^{m+p} \frac{1}{\lambda_k^{4\left[\frac{n}{4}\right]+4}} \cdot \sum_{k=m}^{m+p} \frac{|d_k|^2 + |e_k|^2}{\lambda^{4\left[\frac{n}{4}\right]+2-2\left[\frac{n}{2}\right]}} \to 0 \quad \text{при } m, p \to \infty.$$

З а м е ч а н и е. Если для функции Грина $G$ имеет место оценка

$$|G_{x_i}(X, Y)| \leqslant \frac{C_4}{\eta^{n-1}(X, Y)} \text{ для } X \in \overline{\Omega} \text{ и } Y \in \overline{\Omega}, \tag{6}$$

то легко получить, что ряд Фурье (2), один раз почленно продифференцированный, будет равномерно сходящимся в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Для этого достаточно оценить первые производные от $u_k$ в $\overline{\Omega}$.

В силу (6) ядро $G' = \int\limits_{\Omega} G_{x_i}(X, Y') G_{\left[\frac{n+2}{4}\right]}(Y', Y)\, dY'$ суммируемо со второй степенью по области $\Omega$:

$$\int\limits_{\Omega} G'^2(X, Y)\, dY < C_5,$$

и поэтому

$$|u_{k x_i}| = \lambda_k^2 \left| \int\limits_{\Omega} G_{x_i} u_k\, d\Omega \right| = \lambda_k^{2\left[\frac{n+2}{4}\right]+2} \left| \int\limits_{\Omega} G' u_k\, d\Omega \right| \leqslant \sqrt{C_5}\, \lambda_k^{2\left[\frac{n+2}{4}\right]+2} \quad \text{в } \overline{\Omega}.$$

Число производных, которое указано в работе для $\varphi_0$ и $\varphi_1$, вероятно, несколько завышено, однако элементарность всех рассуждений, дающих, тем не менее, обоснование классическому методу Фурье, побудила меня напечатать эту заметку.

В заключение благодарю акад. В. И. Смирнова, в семинаре которого неоднократно обсуждалась предельная задача для волнового уравнения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
2 VII 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физика, 2, гл. VII, 1945. [2] М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, 8, 171 (1940); И. Г. Петровский, там же, 8, 161 (1940) [3] Р. Курант, К. Фридрихс и Г. Леви, там же, 8, 125 (1940).