Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. ИЛЬИН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА В ВИДЕ БИЛИНЕЙНОГО РЯДА ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 VII 1950)

В ряде задач математической физики существенное значение имеет вопрос о сходимости билинейных рядов из собственных функций, т. е. рядов вида:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^p}, \tag{1}$$

где $\{u_i(P)\}$ и $\{\lambda_i\}$ — система собственных функций и собственных чисел волнового уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$ в некоторой области G с однородными краевыми условиями, а p — произвольная степень.

При $p = 1$ ряд (1) является рядом Фурье для функции источника, что следует из эквивалентности волнового уравнения однородному интегральному уравнению $u(P) = \lambda \int\limits_G K(P, Q)\, u(Q)\, dQ$, где ядро $K(P, Q)$ — функция источника уравнения Лапласа. Ряды с другими и, в частности, дробными степенями p также существенны в математической физике. Они встречаются, например, в работе [1].

В настоящей статье изучается вопрос о характере сходимости билинейных рядов с различными p для прямоугольника и его n-мерных аналогов.

§ 1. Для прямоугольника со сторонами a, b волновое уравнение $\Delta u + \lambda u = 0$ с нулевыми краевыми условиями решается методом разделения переменных. Это приводит к системе собственных функций $u_{mn} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi}{a} mx \cdot \sin\frac{\pi}{b} ny$ и системе собственных чисел $\lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$.

Ряд (1) с произвольным p в этом случае имеет вид:

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}^{(p)}, \tag{2}$$

где

$$u_{mn}^{(p)} = \frac{4}{ab} \frac{\sin\frac{\pi}{a} mx \cdot \sin\frac{\pi}{b} ny \cdot \sin\frac{\pi}{a} m\xi \cdot \sin\frac{\pi}{b} n\eta}{\left[\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]^p}.$$

Вопрос о сходимости этого ряда при $p = 1$ рассматривается в книге [2]. Здесь делается ошибочный вывод об абсолютной сходимости этого ряда везде, кроме сколь угодно малой окрестности источника. Нами сейчас будет доказано, что ряд (2) при $p = 1$ не сходится абсолютно ни для какой пары внутренних точек прямоугольника. Отсюда будет следовать, что речь может итти лишь об условной сходимости этого ряда, причем, если даже этот ряд сходится условно, то существен порядок суммирования относительно m и n. Поэтому записывать с помощью этого ряда функцию источника, не указывая порядка суммирования, нельзя, ибо условно сходящийся ряд можно соответствующей перестановкой членов заставить сходиться в данной точке к любому наперед заданному числу.

Перейдем к доказательству абсолютной расходимости ряда (2) при $p=1$. Докажем, что ряд

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} \left| u_{mn}^{(1)} \right| \tag{3}$$

не сходится абсолютно ни для каких внутренних точек прямоугольника (x, y) и (ξ, η).

Докажем расходимость ряда (3) в области

$$\begin{aligned} {}^2/_3\, a \leqslant x \leqslant a(1-\varepsilon), &\quad a\varepsilon \leqslant \xi \leqslant {}^1/_3\, a, \\ {}^2/_3\, b \leqslant y \leqslant b(1-\varepsilon), &\quad b\varepsilon \leqslant \eta \leqslant {}^1/_3\, b; \end{aligned}$$

здесь ε сколь угодно мало. В этой области $\xi \leqslant x/2$; $\eta \leqslant y/2$. Рассмотрим две последовательности

$$\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{2}(2k-1) \right| \right\}_{(k=1,\, 2,\, 3,\, \ldots)}, \tag{4}$$

$$\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{a} m x \right| \right\}_{(m=1,\, 2,\, 3,\, \ldots)}. \tag{5}$$

Будем называть шагом последовательности разность аргументов двух последовательных членов этой последовательности. Шаг (4) равен π, а шаг (5) равен $\frac{\pi}{a}x$, и, так как $x \leqslant a(1-\varepsilon)$, то шаг (5) не превосходит $(\pi - \varepsilon\pi)$. Поэтому каждому члену (4) можно поставить в соответствие член (5) такой, чтобы аргументы образа и прообраза отличались не более, чем на $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)$, т. е. на полшага (5).

Если $m_1', m_2', \ldots, m_k', \ldots$ — номера членов (5), поставленных в соответствие членам (4), то, по условию соответствия,

$$\left| \frac{\pi}{a} m_k' x - \frac{\pi}{2}(2k-1) \right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{2} \right).$$

Поэтому заведомо:

$$\left| \sin \frac{\pi}{a} m_k' x \right| \geqslant \sin \frac{\varepsilon\pi}{2}. \tag{6}$$

Шаг последовательности $\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{a} m_k' x \right| \right\}$ не будет постоянным. Нетрудно убедиться, что он не превосходит $(2\pi - \varepsilon\pi)$. Но так как в рассматриваемой области $\xi \leqslant \frac{x}{2}$, то шаг $\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{a} m_k' \xi \right| \right\}$ не превосходит $\left(\pi - \frac{\varepsilon\pi}{2} \right)$. Поэтому, рассматривая, как и выше, две последовательности:

$$\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{2}(2p-1) \right| \right\}_{(p=1,\, 2,\, 3,\, \ldots)}, \tag{7}$$

$$\left\{ \left| \sin \frac{\pi}{a} m_k' \xi \right| \right\}_{(k=1,\, 2,\, 3,\, \ldots)}, \tag{8}$$

мы можем каждому члену (7) поставить в соответствие член (8) такой, чтобы аргументы образа и прообраза отличались не более, чем на $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{4} \right)$, т. е. на полшага (8).

Если $m_1, m_3, \ldots, m_p, \ldots$ — номера членов (8), поставленных в соответствие членам (7), то, по условию соответствия,

$$\left| \frac{\pi}{a} m_p \xi - \frac{\pi}{2}(2p-1) \right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{4} \right). \tag{9}$$

Отсюда заведомо:

$$\left| \sin \frac{\pi}{a} m_p x \right| \cdot \left| \sin \frac{\pi}{a} m_p \xi \right| > \sin^2 \frac{\varepsilon\pi}{4}. \tag{10}$$

Из (9), отбрасывая $\varepsilon\pi/4$, получим следующую оценку для номера m_p:

$$m_p < p/\varepsilon. \tag{11}$$

Точно так же осуществляется выбор таких $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$, что

$$\left| \sin \frac{\pi}{b} n_q y \right| \cdot \left| \sin \frac{\pi}{b} n_q \eta \right| > \sin^2 \frac{\varepsilon\pi}{4}, \tag{12}$$

причем для номера n_q имеет место оценка:

$$n_q < q/\varepsilon. \tag{13}$$

С помощью оценок (10), (11), (12), (13) расходимость ряда (3) в рассматриваемой области делается очевидной, если суммировать этот ряд только по m_p и n_q:

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} | u_{mn}^{(1)} | > \sin^4 \frac{\varepsilon\pi}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{p^2}{(a\varepsilon)^2} + \frac{q^2}{(b\varepsilon^2)}}.$$

От рассматриваемой области нетрудно перейти ко всему прямоугольнику.

Теорема обобщается на случай n измерений. Доказывается аналогичным методом, что для n-мерного прямоугольного параллелепипеда билинейный ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P)\, u_i(Q)}{\lambda_i^{n/2}}$$

не сходится абсолютно ни для какой пары внутренних точек P и Q этого параллелепипеда.

§ 2. При исследовании условной сходимости билинейных рядов существенную роль играет порядок суммирования относительно m и n. Будем исследовать сходимость билинейных рядов при суммировании в естественном порядке возрастания собственных чисел.

Теорема. *Билинейный ряд из собственных функций прямоугольника вида*

$$\sum_{m,\, n=1}^{\infty} u_{mn}^{(1/2+\varepsilon)}, \tag{14}$$

где ε — любое положительное число, сходится и притом равномерно относительно (x, y) и (ξ, η) при суммировании в порядке возрастания собственных чисел везде, кроме сколь угодной малой окрестности источника, т. е. когда $\rho[(x, y), (\xi, \eta)] \geqslant \delta$, где δ сколь угодно мало.

Для доказательства достаточно оценить произвольную частную сумму ряда (14). Если из этой частной суммы выделить члены с фиксированным m, то сумма этих членов просто оценивается с помощью преобразования Абеля ([3]). Суммируя затем по всем m, докажем равномерную сходимость ряда (14) при $|x-\xi| \geqslant \delta$. Теорема окончательно будет доказана, если провести те же выкладки относительно индекса n.

Заметим далее, что, пользуясь преобразованием Абеля, можно доказать условную и равномерную сходимость ряда (14) не только при суммировании в порядке возрастания собственных чисел, но и при таком порядке, когда суммирование производится сначала по всем n от 1 до ∞ для каждого значения m, а затем по всем m от 1 до ∞. Последний порядок будем называть суммированием по строкам.

Следствие. При ε равном $1/2$, в силу полноты системы, имеет место билинейная формула для функции источника:

$$K(x, y, \xi, \eta)=\frac{4}{\pi^2 ab}\sum_{m}^{\infty}\sum_{n}\frac{\sin\frac{\pi}{a}mx\cdot\sin\frac{\pi}{a}m\xi\cdot\sin\frac{\pi}{b}ny\cdot\sin\frac{\pi}{b}n\eta}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}};$$

суммирование относительно m и n в порядке возрастания собственных чисел или по строкам, $\rho[(x, y), (\xi, \eta)] \geqslant \delta$, где δ сколь угодно мало.

Аналогично доказывается, что для n-мерного прямоугольного параллелепипеда везде, кроме сколь угодно малой окрестности источника, сходится билинейный ряд вида

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i(P)\,u_i(Q)}{\lambda_i^{\frac{n-1}{2}+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon>0)$$

при суммировании в порядке возрастания собственных чисел или по строкам.

Итак, для интервала степеней собственных чисел от $\frac{n-1}{2}$ до $\frac{n}{2}$ билинейные ряды заведомо не сходятся абсолютно, но вместе с тем сходятся условно при суммировании в естественном порядке возрастания собственных чисел или по строкам. Этим самым показано, что теорема Гильберта — Шмидта не исчерпывает всех вопросов о сходимости билинейных рядов из собственных функций.

В заключение я считаю своим приятным долгом принести глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, под руководством которого сделана эта работа. Я также благодарен А. А. Самарскому и О. И. Панычу за помощь в работе.

Поступило
16 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ, 16, 1283 (1947). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, стр. 364, 1933. [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 9.