Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

А. А. БУЛГАКОВ

О ФУНКЦИИ ПЕРЕДАЧИ МНОГОКАСКАДНОГО УСИЛИТЕЛЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 20 VI 1950)

Функция передачи [1] усилителя, состоящего из n различных каскадов, имеет вид

$$Q_{1-n}(t) = Q_{1-n}\left[1 - \sum_{k=1}^{n} B_{nk} e^{-t/T_k}\right], \tag{1}$$

где $Q_{1-n} = \prod_{k=1}^{n} Q_k$ — произведение статических коэффициентов передачи всех каскадов, $B_{nk} = \dfrac{T_k^{n-1}}{\prod\limits_{i \neq k}^{n} (T_k - T_i)}$, T_k — постоянная времени k-го каскада.

Динамический коэффициент передачи, т. е. изображение функции передачи (1), по Лапласу — Карсону будет

$$Q_{1-n}(p) = \frac{Q_{1-n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + T_k p)}. \tag{2}$$

Если усилитель замкнуть цепью обратной связи, подав на его вход β-ю часть сигнала с выхода, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\beta \neq 0$, то динамический коэффициент передачи усилителя будет

$$Q_3(p) = \frac{Q_{1-n}(p)}{1 - \beta Q_{1-n}(p)}, \tag{3}$$

откуда, применяя формулу обращения Римана — Меллина, функцию передачи усилителя с обратной связью можно выразить интегралом

$$Q_3(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{Q_{1-n}(p)}{1 - \beta Q_{1-n}(p)} \, dp, \tag{4}$$

где значение постоянной σ определяется условием абсолютной сходимости интеграла. Это условие всегда можно усилить, взяв $\sigma_0 > \sigma$ и достаточно большим, чтобы при всех значениях мнимой части $j\omega$ комплексной переменной p, $-\infty < \omega < \infty$, удовлетворялось неравенство

$$|\beta Q_{1-n}(p)| < 1. \tag{5}$$

Для этого достаточно, например, взять

$$\sigma_0 \geqslant \sqrt[n]{\beta Q_{1-n} / \prod_{k=1}^{n} T_k}. \tag{6}$$

В силу неравенства (5) динамический коэффициент (3) в подинтегральном выражении (4) можно представить абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$Q_3(p) = \frac{Q_{1-n}(p)}{1 - \beta Q_{1-n}(p)} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m+1} Q_{1-n}^m(p). \tag{7}$$

На этом основании интеграл (4) для функции передачи можно представить в виде суммы интегралов

$$Q_{1-n}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} Q_{1-n}^m \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + T_k p)} dp. \tag{8}$$

Здесь каждый интеграл

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{e^{pt}}{p} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + T_k p)^m} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{E}_{km}, \tag{9}$$

где $\mathcal{E}_{km}$ — k-й вычет m-го порядка определяется выражением

$$\mathcal{E}_{km} = \frac{1}{T_k^m} e^{-t/T_k} \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_{km}^{(m-\lambda)}(p)\, t^{\lambda-1}}{(m-\lambda)!\,(\lambda-1)!} \tag{10}$$

при $p \to -1/T_k$, $k \neq 0$ ($\mathcal{E}_0 = 1$), а $w_{km}(p) = 1/p \prod\limits_{i \neq k}^{n}(1 + T_i p)$.

Следовательно, производные $w_{km}^{(m-\lambda)}(p)$ после замены p на $-1/T_k$ являются симметрическими функциями постоянных времени каскадов усилителя. Подставив (10) в (8), согласно (9) получим

$$Q_3(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} Q_{1-n}^m + \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} Q_{1-n}^m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k^m} e^{-t/T_k} \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{w_{km}^{(m-\lambda)}(p)\, t^{\lambda-1}}{(m-\lambda)!\,(\lambda-1)!} \tag{11}$$

при $p \to -1/T_k$. В полученном выражении первую сумму можно заменить ее пределом при $\beta Q_{1-n} < 1$ и полученный результат распространить по принципу аналитического продолжения на любые значения βQ_{1-n}, за исключением полюса $\beta Q_{1-n} = 1$. Изменив, кроме того, дважды порядок суммирования в сложном ряду справа, что допустимо в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда, получим

$$Q_{1-n}(t) = \frac{Q_{1-n}}{1 - \beta Q_{1-n}} + \sum_{k=1}^{n} e^{-t/T_k} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \sum_{m=\lambda}^{\infty} \beta^{m-1} Q_{1-n}^m \frac{1}{T_k^m} \frac{w_{km}^{(m-\lambda)}}{(m-\lambda)!} \tag{12}$$

при $p \to -1/T_k$, и окончательно

$$Q_{1-n}(t) = \frac{Q_{1-n}}{1 - \beta Q_{1-n}} - \sum_{k=1}^{n} e^{-t/T_k} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q_{k\lambda}}{(\lambda-1)!} \left(\frac{t}{T_k}\right)^{\lambda-1}. \tag{13}$$

Здесь коэффициенты $q_{k\lambda}$ являются трансцендентными аналитическими функциями постоянных времени усилителя T_k и его статического коэффициента передачи Q_{1-n}

$$q_{k\lambda} = \sum_{m=\lambda}^{\infty} \beta^{m-1} Q_{1-n}^m B_{nk}^m \left[1 - m \sum_{s=1}^{m-\lambda} \frac{1}{s} T_k^{1-s} \sum_{f=1}^{s} f C_{m-1}^{s-f} B_{nk}^{f-s-1} \sum_{j \neq k}^{n} T_j^{-1} B_{nj} \left(\frac{T_j T_k}{T_j - T_k}\right)^f\right].$$

Полученные выражения справедливы и для случая отрицательной обратной связи, если изменить в них знак β на обратный.

Поступило
15 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Булгаков и Г. Н. Алябьева, ДАН, 68, № 4 (1949).