Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. И. БОРОВИЦКИЙ

О ФЛУКТУАЦИЯХ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 14 VI 1950)

В настоящей заметке излагаются некоторые результаты теоретического исследования флуктуаций в системах с периодически меняющимися параметрами, проведенного с помощью уравнения Эйнштейна — Фоккера, и некоторые экспериментальные результаты, иллюстрирующие выводы теории.

1. Рассмотрим линейную систему с периодически меняющимися параметрами, поведение которой описывается без учета случайных толчков динамическим уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t), \tag{1}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — периодические функции периода T. Как известно, статистические явления в такой системе могут быть описаны с помощью уравнения Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{[a(t)\,x + b(t)]\,w\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}c(t)\,w, \tag{2}$$

где $c(t) > 0$ — параметр, описывающий случайные точки в системе, является в интересующих нас случаях функцией времени периода T*.

Основное решение уравнения (2) [1]:

$$w(x', t', x, t) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{\left[x - x' e^{\int_{t'}^{t} a(z)\,dz} - \int_{t'}^{t} b(y)\, e^{\int_{y}^{t} a(z)\,dz}\,dy\right]^2}{4\int_{t'}^{t} c(y)\, e^{2\int_{y}^{t} a(z)\,dz}\,dy}\right\}}{2\sqrt{\pi \int_{t'}^{t} c(y)\, e^{2\int_{y}^{t} a(z)\,dz}\,dy}} \tag{3}$$

представляет собой плотность вероятности перехода системы из состояния x' в момент t'' в состояние x в момент t.

Будем называть систему устойчивой по вероятности, если для любого положительного $\delta < 1$ мы можем указать такую ограниченную область S значений x, что вероятность нахождения системы в этой области

$$\int_S w(x', t';\, x, t)\,dx > \delta$$

для всех t, начиная с некоторого $t_1 \gg t'$. Для того чтобы наша система была устойчива по вероятности, необходимо и достаточно, чтобы

* Все дальнейшее легко обобщить на случай, когда периоды функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ различны.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T a(t)\,dt < 0\ ^*. \tag{4}$$

Мы будем исследовать именно этот случай. При условии (4) существует предел

$$\lim_{t' \to \infty} w(x', t';\ x, t) = w(x, t), \tag{5}$$

представляющий плотность вероятности, устанавливающуюся в системе, независимо от состояния x', в котором находилась система в момент t'. Этот предел равен

$$w(x, t) = \frac{\exp\left\{-\frac{[x - \overline{x(t)}]^2}{2D(t)}\right\}}{\sqrt{2\pi D(t)}}, \tag{6}$$

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x, t)\,dx = \int_{-\infty}^{t} b(y)\, e^{\int_y^t a(z)\,dz}\, dy, \tag{7}$$

$$D(t) = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 2\int_{-\infty}^{t} c(y)\, e^{2\int_y^t a(z)\,dz}\, dy \tag{8}$$

периодические функции периода T. Следовательно, $w(x, t)$ периодически зависит от времени (предельная периодическая вероятность).

2. Пусть для случайной величины $x(t)$ определена плотность вероятности переходов $w(x', t'; x, t)$, обращающаяся при $t' \to -\infty$ в $w(x, t)$. Рассмотрим случайную величину $X[x(t)] = X(t)$. В интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau$ она может быть представлена интегралом Фурье с комплексной амплитудой

$$c_\tau(f) = \int_0^\tau X(t)\, e^{-2\pi f t}\, dt.$$

Отсюда

$$\overline{c_\tau(f)\, c_\tau^*(f)} = \int_0^\tau dt' \int_0^\tau \overline{X(t)\, X(t')}\, e^{-i2\pi f(t-t')}\, dt, \tag{9}$$

$$\overline{X(t)\, X(t')} = \iint_{-\infty}^{+\infty} X(t')\, X(t)\, w(x', t')\, w(x', t'; x, t)\, dx\, dx' \tag{10}$$

(для $t' < t$; для $t' > t$ нужно в (10) поменять местами t' и t).

В общем случае спектр случайной величины $X(t)$ состоит из дискретной и сплошной части (дискретные линии на фоне сплошного спектра**). Если существует предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\overline{2c_\tau(f)\, c_\tau^*(f)}}{\tau} = G(f), \tag{11}$$

то он представляет спектральную плотность сплошного спектра величины $X(t)$. Если для некоторых f_i существует предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\overline{2c_\tau(f)\, c_\tau^*(f)}}{\tau^2} = g_i, \tag{12}$$

* Исходная динамическая система, описываемая уравнением (1), может иметь решения, устойчивые по Ляпунову, и при $a_0 = 0$. В этом случае особенно ясна роль случайных скачков.

** Аналогичный результат получается при рассмотрении спектра импульсов заданной формы, наступающих в моменты $t_\mu = \mu T \varepsilon_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$), где ε_μ — случайная величина [2,3].

то он дает интенсивность дискретной линии частоты f_i. Таким образом, интенсивность I в полосе частот от f_1 до f_2 будет равна

$$I = \int_{f_1}^{f_2} G(f)\,df + \sum_{f_1 \leqslant f_i \leqslant f_2} g_i.$$

Нас будут интересовать спектры величин x и x^2. Вычисление дает

$$\overline{xx'} = e^{\int_{t'}^{t} a(z)\,dz} D' + \bar{x} \cdot \bar{x}' \quad (t > t'), \qquad \overline{x'x} = e^{\int_{t}^{t'} a(z)\,dz} D + \bar{x} \cdot \bar{x}' \quad (t < t'), \tag{13}$$

где штрихи означают, что величины взяты в момент t'. Исследование пределов (11) и (12) показывает, что спектр x имеет дискретную часть тогда и только тогда, когда $\overline{x(t)}$ не равно тождественно нулю; при этом дискретная часть спектра x совпадает со спектром $\overline{x(t)}$. За сплошную часть спектра x ответственны первые члены выражений (13). Форма сплошного спектра может быть различна: рис. 1, *а* показывает примерный вид спектра для $T \gg -1/a_0$, рис. 1, *б* — для $T \ll 1/a_0$. Вычисление дает, далее, для $t' < t$

$$\overline{x^2 x'^2} = \left\{2e^{2\int_{t'}^{t} a(z)\,dz} D'^2 + 5e^{\int_{t'}^{t} a(z)\,dz} D'\overline{x'}\,\overline{x}\right\} + \overline{x^2}\,\overline{x'^2}. \tag{14}$$

Для $t < t'$ нужно поменять местами в формуле (14) штрихованные и нештрихованные величины.

За дискретный спектр величины x отвечает член $\overline{x'^2} \cdot \overline{x^2}$. Так как $\overline{x^2}$ (в отличие от $\bar{x}$) всегда отлично от нуля, спектр x^2 всегда содержит дискретные составляющие (независимо от того, есть ли они в спектре x). За сплошную часть спектра ответственны члены, заключенные в фигурные скобки. Как и сплошной спектр x, сплошной спектр x^2 имеет при $T \gg -1/a_0$ вид, показанный на рис. 1,*а*, а при $T \ll -1/a_0$ на рис. 1,*б*.

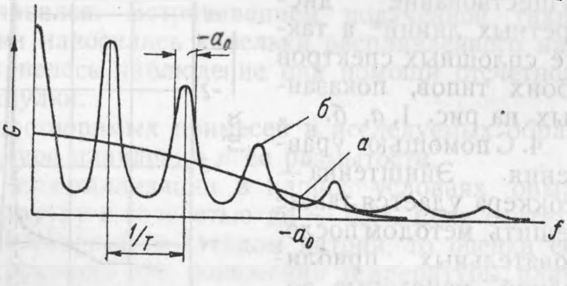

Рис. 1

3. Пусть L, C, r — индуктивность, емкость и сопротивление колебательного контура суперрегенеративного приемника, M — коэффициент обратной связи, S — крутизна лампы, E — вспомогательное переменное напряжение на сетке периода T. Пусть (что всегда имеет место на практике):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ll \Omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad d = \frac{r}{\omega_0 L} \ll 1, \qquad |S(E)\,M\omega_0| \ll 1. \tag{15}$$

При этом амплитуда x колебания в суперрегенераторе в линейном режиме приближенно удовлетворяет, если не учитывать случайные толчки, уравнению вида (1), а если их учитывать — соответственно уравнению вида (2), причем

$$a(t) = \frac{\omega_0}{2}\left[S(E)\,M\omega_0 - d\right], \tag{16}$$

$b(t)$ — периодическая функция t периода T, если частота принимаемого синусоидального сигнала

$$\omega = \omega_0 \pm k\Omega \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

(резонанс) и $b(t)$ — периодическая функция периода $T_1 \neq T$ или почти периодическая функция, если условие (17) не выполняется. В частном случае, когда сигнала нет,

$$b(t) = 0.$$

Именно этот случай был подвергнут экспериментальному исследованию. Напряжение с контура суперрегенератора подавалось через квадратичный детектор на вход гармонического анализатора, представляющего собой супергетеродинный приемник с очень узкой полосой пропускания (эффективная полоса 30 гц). Были получены для разных режимов спектры величины x^2, показанные на рис. 2 и 3, на которых по оси абсцисс отложена частота в кгц, по оси ординат — логарифм отклонения квадратичного прибора на выходе анализатора в условных единицах. Для сравнения на спектрограммах нанесена пунктиром частотная характеристика анализатора. Из спектрограмм видно существование дискретных линий* а также сплошных спектров обоих типов, показанных на рис. 1, *а*, *б*.

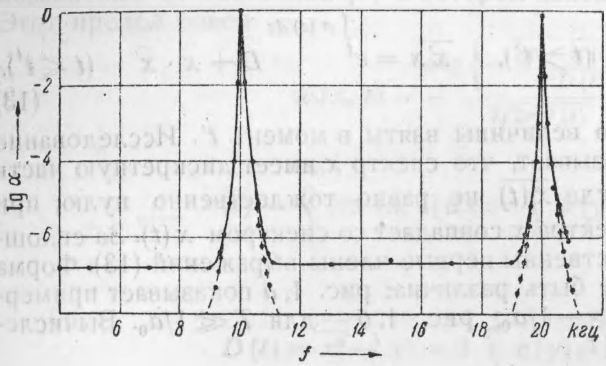

Рис. 2

4. С помощью уравнения Эйнштейна — Фоккера удается также решить методом последовательных приближений некоторые вопросы, касающиеся флуктуаций в слабо нелинейных системах с периодически меняющимися параметрами.

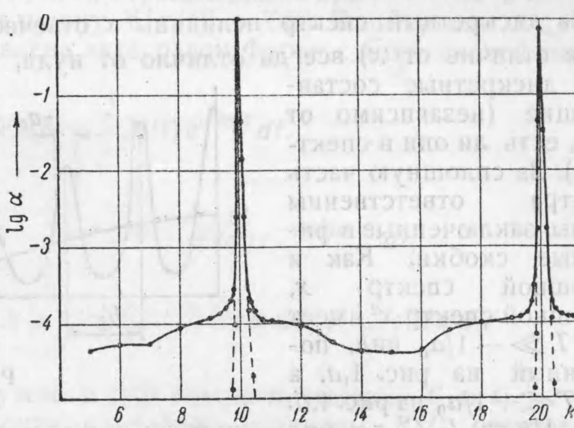

Рис. 3

Выражаю благодарность проф. Г. С. Горелику за внимание к работе и Н. М. Забавиной, помогавшей в проведении экспериментов.

Физико-технический институт при Горьковском государственном университете

Поступило 14 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Усп. мат. наук, 5, 5 (1938). [2] Г. С. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 174 (1950). [3] G. G. Macfarlane, Proc. D. R. E., 37, 1139 (1949).

* Собственно говоря, на основании экспериментальных данных мы можем лишь утверждать, что ширина этих линий мала по сравнению с шириной полосы анализатора. Мы их считаем дискретными на основании теории.