Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Х. Л. СМОЛИЦКИЙ

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 VII 1950)

1°. Пусть Ω — область трехмерного пространства (x^1, x^2, x^3), ограниченная гладкой замкнутой поверхностью S. Пусть $v_m(x^i)$ и λ_m^2 $(m=1, 2, \ldots)$ — ортогональная и нормальная система фундаментальных функций и собственные числа уравнения $\Delta v + \lambda^2 v = 0$ при условии $v|_S = 0$ (Δ — оператор Лапласа). Наша цель доказать, что при некоторых условиях, относящихся к гладкости S, в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$ верны неравенства:

$$|D^k v_m| < A_k \lambda_m^{p_k}, \tag{1}$$

где D^k — производная порядка k, $p_k > 0$ и $A_k > 0$ — некоторые числа, причем A_k зависят лишь от вида области Ω.

2°. Пусть S — поверхность Ляпунова. Примем некоторую точку $M_0 \in S$ за начало местной системы прямоугольных координат x, y, z, направив z по внешней нормали к S. Тогда в некоторой окрестности $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2d$ точки M_0 уравнение поверхности имеет вид: $z = \omega(x, y)$. Пусть $\omega(x, y)$ имеет непрерывные производные до порядка $k \geqslant 1$, причем абсолютные значения всех производных $\omega(x, y)$ не превосходят числа $A > 0$. Если числа d и A не зависят от положения точки M_0, то будем записывать: $S \in Л_k$.

Всякая функция μ, заданная на S, в окрестности точки $M_0 \in S$ представима как функция $\mu(x, y)$ местных координат. Производные по x и y будем обозначать $\widetilde{D}$. Если

$$|\widetilde{D}^k \mu(x, y)| < A, \qquad |[\widetilde{D}^k \mu(x, y)]_{x_1, y_1} - [\widetilde{D}^k \mu(x, y)]_{x_2, y_2}| <$$
$$< A\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\right)^{\alpha} \quad (k = 0, 1, \ldots, l;\ 0 < \alpha < 1),$$

где $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} < \frac{d}{2}$ $(i = 1, 2)$, а $A > 0$ и α не зависит от выбора M_0, то будем записывать: $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha(l, A)$. Так же будем записывать, если $\mu(x^1, x^2, x^3)$ задана в $\overline{\Omega}$ и ее производные до порядка l удовлетворяют аналогичным неравенствам. Очевидно, если $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha(l, A)$ в $\overline{\Omega}$, то ее предельное значение на S также принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha(l, CA)$, где C не зависит от выбора μ.

Потенциалы: объемный по Ω, простого и двойного слоев по S с плотностью μ будем обозначать $P(\mu)$, $V(\mu)$, $W(\mu)$. Прямое значение $W(\mu)$ на S обозначим $\overline{W}(\mu)$. Через $\Gamma(f)$ обозначим такую гармоническую функцию в Ω, что $\Gamma(f)|_S = f$.

3°. Перечислим ряд теорем и формул, приведенных в книге [1]. Эти теоремы верны, если $S \in Л_2$.

Теорема I. *Если* $|\mu| < A$ *в* $\overline{\Omega}$, *то* $P(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$ ((1), стр. 82—85).

Теорема II. *Если* $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0, A)$ *в* $\overline{\Omega}$, *то* $P(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2, CA)$ в $\overline{\Omega}$ ((1), стр. 91, 289).

Теорема III. *Если* $|\mu| < A$ *на* S, *то* $\overline{W}(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0, CA)$ *на* S ((1), стр. 49).

Теорема IV. *Если* $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0, A)$ *на* S, *то* $V(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$ ((1), стр. 66, 256).

В теоремах I и III α любое < 1, и выбор α определяет выбор C.

Кроме того, приведем три формулы для первых производных от $V(\mu)$, $W(\mu)$ и $P(\mu)$, если плотность μ дифференцируема.

$$\frac{\partial V(\mu)}{\partial x^1} = V(D_{x^1}\mu - \mu K \cos \mathbf{n}x^1) + W(\mu \cos \mathbf{n}x^1) \qquad ((1),\ \text{стр. } 67); \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial W(\mu)}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^2} V(\cos \mathbf{n}x^2 \cdot D_{x^1}\mu - \cos \mathbf{n}x^1 \cdot D_{x^2}\mu) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^3} V(\cos \mathbf{n}x^1 \cdot D_{x^3}\mu - \cos \mathbf{n}x^3 \cdot D_{x^1}\mu) \qquad ((1),\ \text{стр. } 72); \quad (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial P(\mu)}{\partial x^i} = P\left(\frac{\partial \mu}{\partial x^i}\right) - V(\mu \cos \mathbf{n}x^i) \qquad ((1),\ \text{стр. } 94), \quad (\mathrm{III})$$

где K — средняя кривизна поверхности, а $D_{x^1}\mu$ — проекция на ось x^1 градиента в точке $M_0 \in S$ функции $\mu(x, y)$, рассматриваемой в местной системе координат для точки M_0; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

4°. Докажем (1), основываясь на двух теоремах, доказательство которых приведем позже.

Теорема 1. *Если* $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(l, A)$ *в* $\overline{\Omega}$ *и* $S \in Л_{l+1}$, *то* $P(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(l+2, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$.

Теорема 2. *Если* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(l, A)$ *на* S *и* $S \in Л_{l+5}$, *то* $\Gamma(f) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(l, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$.

В этих теоремах C не зависит от выбора μ и f.

Известно, что v_m в Ω имеет непрерывные производные любого порядка и удовлетворяет однородному интегральному уравнению, ядром которого служит функция Грина. Отсюда следует: $|v_m| < A\lambda_m^2$. Поэтому, по теореме I: $u_m = P(\lambda_m^2 v_m) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, CA\lambda_m^4)$. Кроме того, $\Delta u_m + \lambda_m^2 v_m = 0$ и, значит, $v_m = u_m - \Gamma(u_m|_S)$. В силу теоремы 2 $\Gamma(u_m|_S) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, C_1' A\lambda_m^4)$, и поэтому $v_m \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, C_1 A\lambda_m^4)$. Допустим, что

$$v_m \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2k - 1, C_k \lambda_m^{2k+2}). \qquad (2)$$

Тогда $\lambda_m^2 v_m \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2k - 1, C_k \lambda_m^{2k+4})$ и из теоремы 1 следует, что $u_m \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2k + C_k' \lambda_m^{2k+4})$, а по теореме 2, $\Gamma(u_m|_S) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2k + 1, C_k'' \lambda_m^{2k+4})$. Тогда $v_m = u_m - \Gamma(u_m|_S) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(2k + 1, C_{k+1} \lambda_m^{2k+4})$, и, так как (2) верно для $k = 1$, то (2) верно для всех k, для которых $2k + 1 \leqslant l$, если $S \in Л_{l+5}$. Неравенство (1) доказано.

5°. Пользуясь формулами (I) и (II) и теоремой IV, применяя математическую индукцию, докажем теоремы.

Пусть $k \leqslant l$ *и* $S \in Л_{l+1}$. *Тогда*:

Теорема 3. *Если* $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(k, A)$ *на* S, *то* $W(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(k, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. *Если* $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(k, A)$ *на* S, *то* $V(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(k + 1, CA)$ *в* $\overline{\Omega}$.

Действительно, если $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(1, A)$, то $\cos \mathbf{n}x^i D_{x^j}\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0, CA)$, и из формулы (II) следует в силу теоремы IV, что $\partial W(\mu) / \partial x \in \mathrm{Lip}\,\alpha\,(0, C_1 A)$, откуда следует $W(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(1, C_2A)$, если учесть $|W(\mu)|<C\max|\mu|$. Далее по формуле (I) и теореме IV находим: если $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(1, A)$, то $\partial V(\mu)/\partial x\in\mathrm{Lip}\,\alpha(1, CA)$, и отсюда заключаем: $V(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(2, C_1A)$, и теоремы 3 и 4 для $k=1$ доказаны. Если допустить, что теоремы 3 и 4 верны для некоторого $k'\geqslant 1$, то, пользуясь формулой (II), доказываем теорему 3 для $k'+1$, а затем, пользуясь формулой (I), доказываем теорему 4 для $k'+1$, если $k'+1\leqslant l$. Теоремы 3 и 4 доказаны.

6°. Для доказательства теоремы 1 воспользуемся теоремой 4 и формулой (III). Если $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(1, A)$, то $\partial\mu/\partial x^i\in\mathrm{Lip}\,\alpha(0, A)$ и, по теореме II, $P(\partial\mu/\partial x^i)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(2, CA)$. Кроме того, $\mu\cos\mathbf{n}x^i\in\mathrm{Lip}\,\alpha(1, C_1A)$, и, по теореме 4, $V(\mu\cos\mathbf{n}x^i)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(2, C_2A)$, откуда, в силу формулы (III), $\partial P(\mu)/\partial x^i\in\mathrm{Lip}\,\alpha(2, C'A)$. Учтя, что $|P(\mu)|<B\max|\mu|$, затем находим: $P(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(3, CA)$, и теорема 1 для $l=1$ доказана. Допустив, что теорема 1 верна для $l'\geqslant 1$, и используя лишь теорему 4 и формулу (III), доказываем, что теорема 1 верна для $l'+1$. Таким образом, теорема 1 доказана.

7°. Рассмотрим интегральное уравнение, которому удовлетворяет плотность потенциала двойного слоя, решающего внутреннюю задачу Дирихле:

$$\mu+2\overline{W}(\mu)=2f. \tag{3}$$

Как известно, при непрерывной f μ также непрерывна.

Теорема 5. *Если $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, A)$ и $S\in Л_{l+5}$, то $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, CA)$.*

Теорему 5 докажем позже. Сейчас, пользуясь теоремами 5 и 3, докажем теорему 2. Действительно, если μ есть решение (3), то $W(\mu)=\Gamma(f)$ и, следовательно, если $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, A)$, то, в силу теорем 5 и 3, заключаем: $\Gamma(f)=W(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, C_1A)$, если $S\in Л_{l+5}$. Теорема 2 доказана.

8°. Для доказательства теоремы 5 достаточно доказать теорему:

Теорема 6. *Если $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l-1, A)$ и $S\in Л_{l+5}$, то $\overline{W}(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, CA)$.*

В самом деле, если f непрерывна, то и μ непрерывна, и тогда, по теореме III, $\overline{W}(\mu)\in\mathrm{Lip}\,\alpha'(0, CA)$, где $0<\alpha'<1$ — любое число. Если $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha(0, A)$, то из (3) следует $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(0, C_1A)$, и теорема 5 верна для $l=0$. Допустив, что $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l-1, CA)$ и $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, A)$, в силу (3) и теоремы 6 заключим, что $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l, C'A)$, если $S\in Л_{l+5}$, и теорема 5 доказана. Осталось доказать теорему 6.

9°. Пусть $M_0\in S$ и (x, y, z) — местные координаты с началом в M_0. Пусть $\eta(\xi)$ имеет непрерывные производные любого порядка в $[0;\infty]$, равна 1 при $\xi\leqslant 1$, равна 0 при $\xi\geqslant {}^3/_2$ и монотонна в $[1; {}^3/_2]$. Положим $\tilde{\mu}(x, y)=\mu(x, y)\,\eta\left(\frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{2d}\right)$ и будем считать $\tilde{\mu}(x, y)\equiv 0$ вне круга $x^2+y^2\leqslant d^2$. Аналогично положим $\tilde{\omega}(x, y)=\omega(x, y)\,\eta\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{d}\right)$ и будем считать ее заданной на всей плоскости и $\tilde{\omega}(x, y)\equiv 0$ вне круга $x^2+y^2\leqslant {}^9/_4 d^2$. Тогда, обозначая D_0 ту окрестность точки M_0 на S, для которой $x^2+y^2\leqslant d^2$, запишем

$$W(\mu)=\iint\limits_{S-D_0}\mu\frac{\cos r\mathbf{n}}{r^2}\,dS+\iint\limits_{D_0}(\mu-\tilde{\mu})\frac{\cos r\mathbf{n}}{r^2}\,dS+\iint\limits_{D_0}\mu\frac{\cos r\mathbf{n}}{r^2}\,dS.$$

Первый и второй интегралы являются аналитическими функциями в той окрестности точки M_0, для которой $x^2+y^2\leqslant d^2/4$, и эти интегралы $\in\mathrm{Lip}\,1(l, A_l)$, где $l=0, 1, 2, \ldots$, $A_l\leqslant C_l\max|\mu|$. Теорема 6 будет доказана, если докажем, что третий интеграл, который обозначим $\overline{W}_3(\tilde{\mu})$, принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha(l, CA)$, если $\mu\in\mathrm{Lip}\,\alpha(l-1, A)$ и $S\in Л_{l+5}$. Пусть Q

и Q_1 — точки плоскости (x, y), ρ — расстояние между Q и Q_1, θ — угол между осью ox и $\overrightarrow{QQ_1}$. Тогда $\overline{W}_3(\widetilde{\mu})$ примет вид, если $x^2+y^2 \leqslant d^2/4$:

$$\overline{W}_3(\widetilde{\mu}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \widetilde{\mu}(x+\rho\cos\theta,\ y+\rho\sin\theta)\,\Psi(x, y, \rho, \theta)\,d\rho\,d\theta, \tag{4}$$

где $\Psi(x, y, \rho, \theta)$ имеет непрерывные производные до порядка $l+2$ по всем аргументам, если $S \in Л_{l+5}$, причем $\Psi(x, y, 0, \theta)$ имеет период π по θ.

Пусть $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha(l-1, A)$. Тогда $\widetilde{D}^{l-1}\,\overline{W}_3(\widetilde{\mu})$ есть сумма интегралов вида

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \widetilde{D}^{l-r-1}\,\widetilde{\mu}(x+\rho\cos\theta,\ y+\rho\sin\theta)\times$$

$$\times\widetilde{D}^{r}\Psi(x, y, \rho, \theta)\,d\rho\,d\theta \qquad (r=0, 1, \ldots, l-1). \tag{5}$$

Докажем, что интегралы (5) $\in \mathrm{Lip}\,\alpha(1, C'A)$ Интегралы (5) имеют структуру интеграла (4) и достаточно доказать: если $\mu \in \mathrm{Lip}\,\alpha(0, A)$, то $\overline{W}_3(\mu) \in \mathrm{Lip}\,\alpha(1, CA)$. Переписав (4) в виде (интегралы по области $-\infty < x_1,\ y_1 < \infty$)

$$\overline{W}_3(\widetilde{\mu}) = \iint \widetilde{\mu}(x_1, y_1)\,\frac{\Psi(x, y, 0, \theta)}{\rho}\,dx_1\,dy_1 + \iint \widetilde{\mu}(x_1, y_1)\,L(x, y; \rho, \theta)\,dx_1\,dy_1,$$

убеждаемся, что $\widetilde{D}\overline{W}_3(\widetilde{\mu})$ есть сумма двумерного сингулярного интеграла ([2])

$$\iint \widetilde{\mu}(x_1, y_1)\,\frac{f(x, y, \theta)}{\rho_2}\,dx_1\,dy_1 \qquad \left(\int_0^{2\pi} f(x, y, \theta)\,d\theta = 0\right)$$

и интеграла

$$\iint \widetilde{\mu}(x_1, y_1)\,\frac{K_1(x, y, \rho, \theta)}{\rho}\,dx_1\,dy_1.$$

Последний интеграл принадлежит $\mathrm{Lip}\,\alpha(0, CA)$, так как $K_1(x, y, \rho, \theta)$ имеет непрерывные первые производные по x, y. Используя известные результаты теории многомерных сингулярных интегралов ([2]), заключаем, что сингулярный интеграл $\in \mathrm{Lip}\,\alpha(0, CA)$, и теорема 6 доказана.

10°. В статье Лихтенштейна ([3]) имеется утверждение, аналогичное теореме 2 нашей статьи, но ссылки Лихтенштейна на некоторые работы (Ляпунов, Корн, Петрини) представляются нам недостаточными для оправдания утверждения.

Использованные нами результаты теории потенциала и теории сингулярных интегралов верны и для n-мерных пространств $(n > 3)$, и поэтому все полученные нами результаты без существенных изменений переносятся на многомерные пространства. Для $n=2$ рассмотрение вопроса упрощается.

Поступило
27 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. M. Gunther, La théorie du potentiel et..., Paris, 1934. [2] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3, 81 (1948). [3] Enzyklopädie der math. Wiss., II 3, H. 3, S. 241—242 (1919).