Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. И. БАРЕНБЛАТТ

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 27 VI 1950)

Задача о теплопередаче в турбулентном потоке жидкости в приближенной постановке приводится к уравнению:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q(x)\frac{\partial T}{\partial t} \quad (0 \leqslant x \leqslant \infty). \tag{1}$$

Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 работы [3]. Рассмотрим два способа решения уравнения (1) при условиях ($\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$):

$$T(0, t)\sin\alpha - \frac{\partial T(0, t)}{\partial x}\cos\alpha = \varphi(t); \; T(x, 0) = f(x); \; \frac{\partial T(\infty, t)}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

1. Полагаем $T = T_1 + T_2$, где T_1 и T_2 удовлетворяют уравнению (1), причем:

$$T_1(0, t)\sin\alpha - \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x}\cos\alpha = 0; \; T_1(x, 0) = f(x); \; \frac{\partial T_1(\infty, t)}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$T_2(0, t)\sin\alpha - \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x}\cos\alpha = \varphi(t); \; T(x, 0) = 0; \; \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Решение T_1 строится по методу работы [3]. Строим решение T_2. Если $\sin\alpha\cos\alpha = 0$, то соответствующие решения указаны в работе [3]; будем считать $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$. Пусть $\partial T_2(0, t)/\partial x = -\Phi(t)$, пока неизвестному. Зная $\Phi(t)$, мы получаем T_2 [3], именно:

$$T_2(x, t) = \int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_1(x, \lambda)\,d\lambda}{\pi(\mu_1^2 + \nu_1^2)}. \tag{5}$$

Здесь $\varphi_1(x, \lambda)$ — решение уравнения $y'' + \lambda q(x) y = 0$, причем $\varphi_1(0, \lambda) = 1$, $\varphi'_{1x}(0, \lambda) = 0$; μ_1, ν_1 — соответствующие $\varphi_1(x, \lambda)$ коэффициенты асимптотических представлений. При $x = 0$ имеем:

$$T_2(0, t) = \int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\lambda}{\pi(\mu_1^2 + \nu_1^2)}.$$

Подставляя значения $T_2(0, t)$ и $\partial T_2(0, t)/\partial x$ в первое условие (4), приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода для $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) + h\int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}\,d\lambda}{\mu_1^2 + \nu_1^2} = s(t); \quad s(t) = \frac{\varphi(t)}{\cos\alpha}; \quad h = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pi}. \tag{6}$$

Решив это уравнение, мы получим $T_2(t)$ по формуле (5).

2. Полагаем $T = T_1 + T_2$, где T_1 и T_2 удовлетворяют уравнению (1), причем:

$$T_1(0, t)\sin\alpha - \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x}\cos\alpha = 0; \quad T_1(x, 0) = f(x) - K, \quad \frac{\partial T_1(\infty, t)}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$T_2(0, t)\sin\alpha - \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x}\cos\alpha = \varphi(t); \quad T_2(x, 0) = K, \quad \frac{\partial T_2(\infty, t)}{\partial x} = 0. \tag{8}$$

Здесь K — некоторая константа. Строим сперва T_2. Пусть $T_2(0, t) = \Psi(t)$, пока неизвестному. Выберем $K = \Psi(0)$, тогда (см. [3]):

$$T_2 = \Psi(0) + \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_2(x, \lambda)\, d\lambda}{\pi(\mu_2^2 + \nu_2^2)}. \tag{9}$$

Здесь $\varphi_2(x, \lambda)$ — решение уравнения $y'' + \lambda q(x) y = 0$, причем $\varphi_2(0, \lambda) = 0$, $\varphi'_{2x}(0, \lambda) = 1$; μ_2, ν_2 — соответствующие $\varphi_2(x, \lambda)$ коэффициенты асимптотических представлений.

Рассмотрим выражение: $Q(t) = \int_0^\infty q(\xi)[T_2(\xi, t) - \Psi(0)]\, d\xi$, представляющее собой сумму тепла, притекшего к эквивалентному стержню [3] от изменения температуры на его нулевом конце. Для вычисления $Q(t)$ введем фиктивный конец $x = b$ и на нем условие: $\partial T_2(b, t)/\partial x = 0$. Тогда

$$T_2 = \Psi(0) + \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)}\varphi_2(x, \lambda)\, d\rho_b(\lambda),$$

где $\varphi_2(x, \lambda)$ дополнительно удовлетворяет условию $\varphi'_{2x}(b, \lambda) = 0$, а $\rho_b(\lambda) = \sum\limits_{0 \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda} \left\{ \int_0^b q(x)\varphi_2^2(x, \lambda)\, dx \right\}^{-1}$ (λ_n — собственные числа).

Поэтому, в силу свойств функции $\varphi_2(x, \lambda)$, имеем:

$$Q(t) = \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)} \left[\int_0^b q(\xi)\varphi_2(\xi, \lambda)\, d\xi \right] d\rho_b(\lambda) =$$

$$= \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)}\lambda^{-1}\, d\rho_b(\lambda).$$

Устремляем b к бесконечности. В силу теоремы 1 работы [3] $\rho(\lambda) = \lim \rho_b(\lambda)$ $(b \to \infty)$ не зависит от вида условия на конце, устремленном в бесконечность; поэтому получаем:

$$Q(t) = \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(t-\tau)}\, d\lambda}{\pi\lambda(\mu_2^2 + \nu_2^2)}. \tag{10}$$

Но

$$dQ/dt = \int_0^\infty q(\xi)\frac{\partial T}{\partial t}\, d\xi = \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}\, d\xi = -\frac{\partial T(0, t)}{\partial x}.$$

Для отыскания dQ/dt преобразуем формулу (9). Положим

$$R = \int_t^\tau d\sigma \int_0^\infty e^{-\lambda (t-\sigma)} \pi^{-1} \lambda^{-1} (\mu_2^2 + \nu_2^2)^{-1} d\lambda.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$Q(t) = \int_0^t [\Psi(\tau) - \Psi(0)]\, dR = - \int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau} d\tau \int_t^\tau d\sigma \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda (t-\sigma)}\, d\lambda}{\pi\lambda\, (\mu_2^2 + \nu_2^2)}, \tag{11}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{d\Psi}{d\tau} \int_t^\tau d\sigma \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda (t-\sigma)}\, d\lambda}{\pi\lambda\, (\mu_2^2 + \nu_2^2)} \Bigg|_{t=\tau} - \int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau} d\tau \frac{d}{dt} R(t-\tau) = \int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau} d\tau \frac{dR}{d\tau},$$

так как $R = R(t-\tau)$. Окончательно получаем:

$$- \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \frac{dQ}{dt} = \int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau} d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda (t-\tau)}\, d\lambda}{\pi\lambda\, (\mu_2^2 + \nu_2^2)}. \tag{12}$$

Подставляя во второе условие (8) значения $T_2(0, t)$ и $\partial T_2(0, t)/\partial x$, придем к интегро-дифференциальному уравнению для $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) + h \int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau} d\tau \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda (t-\tau)}\, d\lambda}{\lambda\, (\mu_2^2 + \nu_2^2)} = p(t), \quad h = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pi}, \quad p(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin \alpha}. \tag{13}$$

Решив это уравнение, мы получим $\Psi(t)$, следовательно, и $\Psi(0)$, и построим T_2 по формуле (9). Построение T_1 проводится методом работы ([3]).

3. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям Б. М. Левитана ([1]), можно показать, что если $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 работы ([3]), то

$$\rho_1(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\pi\, (\mu_1^2 + \nu_1^2)} \leqslant C \lambda^{\frac{m+1}{m+2}}; \quad \rho_2(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\pi\, (\mu_2^2 + \nu_2^2)} \leqslant C \lambda^{\frac{m+3}{m+2}},$$

где C — некоторая константа. Отсюда получаем, интегрируя по частям:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda (t-\sigma)} d\rho_1(\lambda) \leqslant N (t-\sigma)^{-\frac{m+1}{m+2}}; \quad \int_0^\infty e^{-\lambda (t-\sigma)} \lambda^{-1} d\rho_2(\lambda) \leqslant N (t-\sigma)^{-\frac{1}{m+2}}.$$

N — некоторая константа. Из этого можно вывести законность применения операций пп. 1 и 2.

4. Рассмотрим важный частный случай $q(x) \equiv x^m$. Тогда

$$\mu_1^2 + \nu_1^2 = \lambda^{\frac{1}{m+2}} \pi^{-1} \Gamma^2 \left(\frac{m+1}{m+2} \right) (m+2)^{m/(m+2)};$$

$$\mu_2^2 + \nu_2^2 = \lambda^{-\frac{1}{m+2}} \pi^{-1} \Gamma^2 \left(\frac{1}{m+2} \right) (m+2)^{-m/(m+2)};$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda (t-\tau)} d\rho_1(\lambda) = \frac{(m+2)^{-m/(m+2)}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right) (t-\tau)^{\frac{m+1}{m+2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)}\lambda^{-1}\,d\rho_2(\lambda) = \frac{(m+2)^{m/(m+2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)(t-\tau)^{1/(m+2)}}.$$

Интегральное уравнение (6) имеет в данном случае вид:

$$\Phi(t) + \rho\int_0^t \Phi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{m+1}{m+2}}\,d\tau = s(t), \quad \rho = \frac{\operatorname{tg}\alpha\,\Gamma^{-1}\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{(m+2)^{-m/(m+2)}}. \tag{14}$$

В несколько иной форме это уравнение имеется у Саттона ([2]). В данном случае, однако, удобнее применять метод п. 2. Интегро-дифференциальное уравнение (13) имеет для данного случая вид:

$$\Psi(t) + \rho\int_0^t \frac{d\Psi}{d\tau}(t-\tau)^{-1/(m+2)}\,d\tau = p(t), \quad \rho = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\,\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{m+2}\right)}{(m+2)^{-m/(m+2)}}. \tag{15}$$

Пусть $p(t)$ может быть представлено в виде ряда: $p(t) = \sum a_\beta t^{\beta/(m+2)}$ (β — целые положительные числа).

Положим $\Psi = \sum a_\beta \Psi_{m,\beta}$, где $\Psi_{m,\beta}$ удовлетворяет уравнению:

$$\Psi_{m,\beta}(t) + \rho\int_0^t \frac{d\Psi_{m,\beta}}{d\tau}(t-\tau)^{-\frac{1}{m+2}}\,d\tau = t^{\frac{\beta}{m+2}}. \tag{16}$$

Можно показать, $\Psi_{m,\beta}(t)$ суть полиномы по степеням $t^{1/(m+2)}$. Это получается, если искать решение уравнения (16) в виде ряда по степеням ρ. Коэффициенты полиномов можно вычислить заранее и по заданному $p(t)$ сразу выписывать $\Psi(t)$. Например:

$$\Psi_{1,3} = t - \frac{3}{2}\rho t^{2/3} + \rho^2\frac{\Gamma^2(2/3)}{\Gamma(4/3)}t^{1/3} - \rho^3\Gamma^3(2/3),$$

$$\Psi_{2,4} = t - \frac{4}{3}\rho t^{3/4} + \rho^2\frac{\Gamma^2(3/4)}{\Gamma(3/2)}t^{1/2} - \rho^3\frac{\Gamma^3(3/4)}{\Gamma(5/4)}t^{1/4} + \rho^4\Gamma^4(3/4).$$

Поступило
26 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, ДАН, **71**, № 4 (1950). [2] W. G. L. Sutton, Proc. Roy. Soc. № 6 (1943). [3] Г. И. Баренблатт, ДАН, **72**, № 4 (1950).

Поправка. В статье ([3]) уравнение (1) напечатано неверно. Следует читать: $y'' + \lambda q(x)y = 0$. Там же в выражении решения уравнения (7) при условиях (9) и в выражении для $\Phi(x, t, \xi)$ пропущен множитель $1/\pi$.
