Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

ТЕПЛОТЕХНИКА

Л. С. ЭЙГЕНСОН

НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПРОВОДИМОСТИ

(Представлено академиком А. В. Винтером 29 VI 1950)

Рассмотрим сначала линейное потенциальное поле с однородными граничными условиями, причем через все эквипотенциальные проходит один и тот же поток. В некоторых случаях (пластина, круглая труба шаровой слой) форма эквипотенциальных линий может быть определена из соображений симметрии. Поток Q через любую эквипотенциальную поверхность равен

$$Q = -\lambda(t)\frac{dt}{dn}f(n), \tag{1}$$

причем $\lambda = \lambda(t)$ — коэффициент проводимости, являющийся непрерывной функцией потенциала t, n — нормаль к эквипотенциальной поверхности, $f(n)$ — площадь последней.

Из (1), применяя теорему о среднем значении интеграла, можно получить формулу (2) для потока и уравнение (3) распределения потенциала

$$Q = \frac{\overline{\lambda}(t)(t_1 - t_2)}{I_{n_1}^{n_2}}, \tag{2}$$

$$\frac{I_{n_1}^{n}}{I_{n_1}^{n_2}} = \frac{1}{\overline{\lambda}(t)(t_1 - t_2)}\int_{t}^{t_1}\lambda(t)\,dt. \tag{3}$$

Здесь t_1 и t_2 — значения потенциала на границах поля, т. е. при $n = n_1$ и $n = n_2$,

$$I_{n_1}^{n_2} = \int_{n_1}^{n_2}\frac{dn}{f(n)}; \quad I_{n_1}^{n} = \int_{n_1}^{n}\frac{dn}{f(n)}; \quad \overline{\lambda}(t) = \frac{1}{t_1 - t_2}\int_{t_2}^{t_1}\lambda(t)\,dt. \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) справедливы для пластины, круглой трубы и шарового слоя и могут быть конкретизированы для каждого из упомянутых случаев путем вычисления „форм-факторов“ $I_{n_1}^{n_2}$ и $I_{n_1}^{n}$. Способ усреднения λ не зависит от геометрической конфигурации.

Пусть граничные контуры плоского потенциального поля, на которых заданы значения потенциала t_1 и t_2, могут быть отображены с помощью аналитической функции $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ на плоскость $F(z)$ так, чтобы эти контуры после отображения образовали две линии, параллельные одной из координатных осей φ или ψ.

Заметим, что функция $F(z) = \varphi + i\psi$ удовлетворяет условиям Д'Аламбера — Эйлера, т. е. $\partial\varphi / \partial x = \partial\psi / \partial y$ и $\partial\varphi / \partial y = -\partial\psi / \partial x$, в силу чего

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0. \tag{5}$$

Отобразив упомянутым выше способом плоскую фигуру (с плоскости xy) в виде пластины на плоскости $\varphi\psi$, применим к последней формулу (3), положив в ней $n = \psi$; $n_1 = \psi_1$; $n_2 = \psi_2$ *. При этом получим

$$\frac{I_{\psi_1}^{\psi}}{I_{\psi_1}^{\psi_2}} = \frac{1}{\bar{\lambda}(t)(t_1 - t_2)} \int_{t}^{t_1} \lambda(t)\, dt. \tag{6}$$

Уравнение (6) распределения потенциала в пластине на плоскости $\varphi\psi$ при $\lambda = \lambda(t)$ выражает ψ как функцию t. При этом t удовлетворяет уравнению Лапласа при $\lambda = \lambda(t)$, написанному для пластины в плоскости $\varphi\psi$, т. е.

$$\frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{dt}{d\psi}\right)^2 + \lambda(t)\frac{d^2 t}{d\psi^2} = 0. \tag{7}$$

Легко показать, что t удовлетворяет также уравнению Лапласа при $\lambda = \lambda(t)$ на плоскости xy, т. е.

$$\frac{d\lambda}{dt}\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] + \lambda(t)\nabla^2 t = 0. \tag{8}$$

Действительно, так как

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{dt}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{dt}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \nabla^2 t = \frac{d^2 t}{d\psi^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{dt}{d\psi}\nabla^2\psi, \tag{9}$$

то

$$\frac{d\lambda}{dt}\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] + \lambda(t)\nabla^2 t =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}\left[\frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{dt}{d\psi}\right)^2 + \lambda(t)\frac{d^2 t}{d\psi^2}\right] + \lambda(t)\nabla^2\psi. \tag{9}$$

Правая часть (9) в силу равенств $\Delta^2\psi = 0$ и (7) тождественно равна нулю. Поэтому t удовлетворяет уравнению (8). Граничные же условия удовлетворяются в силу самого преобразования $F(z)$, которое отображает граничные эквипотенциальные линии $t = t_1$ и $t = t_2$ в виде прямых $\psi = \psi_1$ и $\psi = \psi_2$ (или $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$).

Выразив ψ как функцию x и y, вид которой определяется видом функции $F(z)$ мы получим искомое уравнение распределения потенциала в плоскости xy при $\lambda = \lambda(t)$.

Из изложенного следует, что эквипотенциальные линии имеют одинаковую форму при $\lambda = \lambda(t)$ и при $\lambda = \text{const}$; различие заключается лишь в „отметках" этих линий.

Применив к пластине в плоскости $\varphi\psi$ формулу (2), получим

$$Q = \frac{\bar{\lambda}(t)(t_1 - t_2)}{\psi_2 - \psi_1}(\varphi_2 - \varphi_1)\, l, \tag{10}$$

где φ_1 и φ_2 — граничные значения координаты φ, l — размер, нормальный к плоскости $\varphi\psi$.

Изложенный метод остается в силе, если в результате отображения граничные контуры плоского поля представятся на плоскости $F(z)$ в виде двух концентрических окружностей.

Всесоюзный заочный
энергетический институт

Поступило
19 VI 1950

* Или $n = \varphi$; $n_1 = \varphi_1$; $n_2 = \varphi_2$, если граничные эквипотенциальные линии отображены в виде прямых, параллельных оси ψ.