Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ЧУДАКОВ и Ю. В. ЛИННИК

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВПОЛНЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 19 VII 1950)

Недавно ([1]) мы рассмотрели новый класс вполне мультипликативных функций, изучение которых, по нашему мнению, интересно с точки зрения аксиоматики характеров Дирихле. Эти функции $h(n)$, кроме условия мультипликативности, подчинены еще дополнительным условиям:

1° $|h(n)|=0, 1$.

2° $S(x)=\sum\limits_{n\leqslant x} h(n)$ ограничена для всех $x\geqslant 1$.

Такие функции мы назвали „обобщенными характерами". Простейший пример $h(n)$ таков: пусть $h(1)=1$; $h(p_0)\neq 0, 1$, p_0 простое; $h(p)=0$ для всех простых $p\neq p_0$. $h(n)$ определяется, очевидно, своими значениями на „базе", т. е. на совокупности тех простых, для которых эта функция отлична от нуля. Приведенный выше пример показывает, что база $h(n)$ может состоять только из одного элемента.

Авторы этой заметки поставили себе целью показать, что кроме этого примера $h(n)$ не существует других таких же функций с конечной базой.

Эта работа опирается на исследования И. М. Виноградова, А. О. Гельфонда и др. Основная идея настоящей работы и главные оценки принадлежат в равной мере обоим соавторам.

Теорема. *Пусть вполне мультипликативная функция $h(n)$ подчинена условию 1° и имеет конечную базу, состоящую более чем из одного элемента. Тогда:*

$$\sup_{0\leqslant x<\infty} |S(x)|=\infty.$$

Эту теорему мы будем доказывать от противного. Пусть существует обобщенный характер $h(n)$, база которого состоит из простых $p_1, p_2, \ldots, p_\lambda$, $\lambda\geqslant 2$. Пусть, далее, $\chi_0(n)$ — главный характер Дирихле, основной модуль которого равен $p_3 p_4\cdots p_\lambda$.

Ранее ([1]) было показано, что если $h(n)$ — обобщенный характер, то и $h_1(n)=\chi_0(n)h(n)$ также будет обобщенным характером. Но база $h_1(n)$ состоит уже только из двух простых. Поэтому ясно, что нашу теорему достаточно доказывать только для $h(n)$ с двухчленной базой. Аналогичный прием рассуждения убедит нас в том, что достаточно рассмотреть только случай, когда $h(n)$ отлична от 1 на элементах базы.

Обозначения. Символ $A\ll B$ для $|B|>0$ обозначает, что $|A|\leqslant c|B|$, где $c>0$ и зависит только от заданной функции $h(n)$; $A\asymp B$ обозначает, что

$$B\ll A\ll B.$$

Полагаем теперь:

$$L(s, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s} = (1 - h(p)\,p^{-s})^{-1}\,(1 - h(q)\,q^{-s})^{-1},$$

$$h(p) = e^{\varphi i}, \quad h(q) = e^{\psi i}, \quad 0 < \varphi, \quad \psi < 2\pi,$$

p и q простые и $p \neq q$.

Полюса функции $L(s, h)$ пусть будут:

$$\alpha_n i, \quad \beta_n i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где

$$\alpha_n = \frac{\varphi + 2\pi n}{\lg p}, \quad \beta_n = \frac{\psi + 2\pi n}{\lg q},$$

$$L_n = \operatorname*{Res}_{s=\alpha_n i} L(s, h), \quad L_n' = \operatorname*{Res}_{s=\beta_n i} L(s, h),$$

$$H(x) = S(e^x).$$

$f(x)$ определена для всех $x \geqslant 0$,

$$M(\alpha, f) = \lim_{x \to \infty} x^{-1} \int_0^x f(u)\, e^{-\alpha u i} du,$$

где α — действительное число.

$((x))$ — расстояние x до ближайшего целого.

Лемма 1. *Если $f(x)$ ограничена для $x \geqslant 0$ и интегрируема в любом конечном интервале, а ее неопределенный интеграл совпадает с почти периодической функцией f_1, то $M(\alpha, f)$ существует для любого действительно α, причем*

$$M(\alpha, f) = \alpha i M(\alpha, f_1).$$

Кроме того:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |M(\alpha_k, f)|^2 \leqslant C^2,$$

где $C = \sup\limits_{x \geqslant 0} |f(x)|$; α_k $(k = 1, \ldots)$ — те значения α, для которых $M(\alpha, f) \neq 0$.

Эта лемма легко следует из элементов теории почти-периодических функций.

Лемма 2. *Если $S(x) \ll 1$, то L_n и $L_n' \ll n$ и $\alpha_m \neq \beta_n$ для любой пары целых m и n.*

Доказательство. Пусть $s = \eta + \alpha_n i$, $\eta > 0$; тогда

$$L(s, h) = \sum_{m=1}^{\infty} h(m)\, m^{-\alpha_n i}\, m^{-\eta} = \eta \int_1^{\infty} S_1(x)\, x^{-1-\eta} dx,$$

где

$$S_1(x) = \sum_{m \leqslant x} h(m)\, m^{-\alpha_n i}.$$

Но

$$S_1(x) \ll \alpha_n \lg x \ll n \lg x,$$

откуда

$$\eta L(s, h) \ll n, \quad L_n \ll n.$$

Аналогично получаем и $L'_n \ll n$. Эти соотношения исключают возможность существования двойного полюса, т. е. равенства $\alpha_n = \beta_m$.

Лемма 3. *Пусть α и β — два положительных алгебраических числа, логарифмы которых линейно независимы; γ — действительное число; $\mathscr{E}_\gamma$ — множество тех целых рациональных чисел n, для которых*

$$((n\vartheta + \gamma)) \leqslant |n|^{-1} \lg^2 |n|,$$

где $\vartheta = \frac{\lg \alpha}{\lg \beta}$. *Тогда* $\sum\limits_{n \in \mathscr{E}_\gamma} \frac{1}{|n|} < \infty$ *при любом* γ.

Доказательство. Пусть $q_1 < q_2 < \cdots$ — последовательность знаменателей подходящих дробей числа ϑ; $\mathscr{E}_{\nu, \mu}$ — совокупность тех $n \in \mathscr{E}_\gamma$, для которых справедливо неравенство:

$$\mu q_\nu \leqslant |n| \leqslant (\mu + 1) q_\nu - 1$$

для $\mu = 1, 2, \ldots, \mu_0$, где $\mu_0 = [q_\nu^{-1} q_{\nu+1}]$; $N_{\nu, \mu}$ — число элементов $\mathscr{E}_{\nu, \mu}$; $\mathscr{E}_\nu = \sum\limits_{\mu=1}^{\mu_0} \mathscr{E}_{\nu, \mu}$.

Тогда, применяя метод И. М. Виноградова (²) к оценке числа дробных долей величины $n\vartheta + \gamma$, мы без труда получаем:

$$N_{\nu, \mu} \ll \mu^{-1} \lg^2 q_{\nu+1} + 1,$$

откуда:

$$\sum_{n \in \mathscr{E}_\nu} \frac{1}{|n|} \ll \sum_{\mu \leqslant \mu_1} \frac{\lg^2 q_{\nu+1}}{q_\nu \mu^2} + \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_0} \frac{1}{q_\nu \mu} \ll \frac{\lg^2 q_{\nu+1}}{q_\nu},$$

где $\mu_1 = [\lg^2 q_{\nu+1}]$.

Но в силу известной теоремы А. О. Гельфонда (³) мы имеем:

$$\lg q_{\nu+1} \ll \lg^{3,5} q_\nu.$$

Таким образом:

$$\sum_{n \in \mathscr{E}_\gamma} \frac{1}{|n|} \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lg^7 q_\nu}{q_\nu} \ll 1,$$

ибо всегда $q_\nu \geqslant 2^{\nu/2}$.

Переходим теперь к доказательству нашей теоремы. Классическая теория преобразований рядов Дирихле дает нам тождество:

$$\int\limits_0^x H(u)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2)} s^{-2} e^{xs} L(s, h)\, ds.$$

Функция $e^{xs} L(s, h)$ ограничена как в области, где $|\sigma| \geqslant 1$, так и на некотором счетном множестве отрезков $s = \sigma + T_\nu i$, $|\sigma| \leqslant 1$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Поэтому мы можем контур интегрирования удалить в бесконечность слева от мнимой оси и, учтя все особенности функции $L(s, h)$, будем иметь формально:

$$\int_0^x f(x)\,dx = L'(0, h) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L_n}{\alpha_n^2} e^{\alpha_n xi} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{L'_n}{\beta_n^2} e^{\beta_n xi}, \tag{1}$$

где $f(x) = H(x) - L(0, h)$.

Чтобы полностью оправдать законность вывода тождества (1), достаточно показать абсолютную сходимость рядов в правой части (1).

Займемся первым рядом. Заметим, прежде всего, что

$$L_n \asymp (1 - h(q)\, q^{-\alpha_n i})^{-1}.$$

Следовательно,

$$L_n \asymp ((\vartheta n + \gamma))^{-1},$$

где $\vartheta = \frac{\lg q}{\lg p}$, $\gamma = (2\pi)^{-1}(\vartheta\varphi - \psi)$.

Поэтому, прилагая леммы 2 и 3, получаем:

$$\sum_{n|\geqslant 1} \frac{|L_n|}{\alpha_n^2} \ll \sum_{n \in \mathcal{E}_\gamma} \frac{1}{|n|} + \sum_{n \in \mathcal{E}'_\gamma} \frac{1}{n^2((\vartheta n + \gamma))} \ll \sum_{n \in \mathcal{E}_\gamma} \frac{1}{|n|} + \sum_{n \in \mathcal{E}'_\gamma} \frac{1}{n \lg^2 n} < \infty,$$

где $\mathcal{E}'_\gamma$ — множество всех n, не принадлежащих $\mathcal{E}_\gamma$.

Аналогично доказываем абсолютную сходимость и второго ряда.

Тождество (1) убеждает нас в том, что $f(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1, из которой мы заключаем, что $L_n = o(n)$, т. е. $((\vartheta n + \gamma))^{-1} = o(n)$.

А это последнее соотношение противоречит известной теореме Чебышева ([4]), утверждающей существование бесконечного множества натуральных n таких, что $((\vartheta n + \gamma)) \ll n^{-1}$, каковы бы ни были ϑ и γ.

Обнаруженное противоречие доказывает нашу теорему.

Поступило
22 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чудаков и К. А. Родосский, ДАН, 73, № 6 (1950). [2] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 23 (1947). [3] А. О. Гельфонд, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 509 (1939). [4] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М., 1949.