Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. А. МАРЧЕНКО

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 VII 1950)

Сформулируем исходную теорему A предыдущей заметки [1], введя удобные для дальнейшего обозначения. Пусть L — заданный на полуоси $[0, \infty)$ дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L[u] = u''(x) - q(x)u(x), \tag{I}$$

где $q(x)$ — вещественная функция, суммируемая в каждом конечном интервале полуоси $[0, \infty)$. Обозначим через $\omega_h(\lambda, x)$ решения уравнений

$$L[u] + \lambda u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющие начальным данным:

$$\omega_h(\lambda, 0) = 1 \quad \omega_h'(\lambda, 0) = h, \quad \text{если } h \neq \infty;$$

$$\omega_h(\lambda, 0) = 0, \quad \omega_h'(\lambda, 0) = 1, \quad \text{если } h = \infty,$$

где h и λ — произвольные вещественные числа.

Теорема A. *Для каждой пары операторов L_1 и L_2 вида* (I) *и вещественных чисел h_1 и h_2, могущих обращаться в бесконечность только одновременно, существует оператор преобразования* $V = V_{\{L_1 L_2 h_1 h_2\}}$, определенный на всех суммируемых в каждом интервале полуоси $[0, \infty)$ функциях $f(x)$ равенством*

$$V(f) = f(x) + \int_0^x K(x, t) f(t)\, dt,$$

такой, что

$$V[\omega_{h_1}^{(1)}(\lambda, x)] = \omega_{h_2}^{(2)}(\lambda, x),$$

где $\omega_{h_1}^{(1)}(\lambda, x)$ и $\omega_{h_2}^{(2)}(\lambda, x)$ — решения уравнений (1) *для операторов L_1 и L_2 соответственно. При этом ядро $K(x, t)$ вещественно и равномерно ограничено в каждом конечном квадрате $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant b$, $b < \infty$.*

При решении вопросов, не связанных с равномерной метрикой на полуоси $[0, \infty)$, обычно оказывалось достаточным знать элементарные свойства операторов преобразования, непосредственно вытекающие из их вида. Попытки приложения операторов преобразования к вопросам,

* Важные частные случаи операторов преобразования рассматривались в [2-4] в связи с теорией обобщенного сдвига.

существенно связанным с равномерной метрикой на полуоси $[0, \infty)$ (например, к теории обобщенных почти периодических функций), наталкивались на специфические затруднения, полное преодоление которых не удавалось ([3]) даже в предположении, что функции $q(x)$, отвечающие операторам L, удовлетворяют дополнительному ограничению

$$\int_0^\infty (1+x^2)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{II}$$

В связи с этим в настоящей заметке мы подробно исследуем строение операторов преобразования, предполагая условие (II) выполненным, что позволяет в этом случае преодолеть отмеченные выше затруднения.

Обозначим через D оператор дифференцирования: $D[u] = u'(x)$. Тогда D^2 есть простейший из операторов вида (I). Очевидно, любой оператор преобразования $V_{\{L_1L_2h_1h_2\}}$ можно представить в виде:

$$V_{\{L_1L_2h_1h_2\}} = V_{\{D^2L_20h_2\}} V_{\{L_1D^2h_10\}}, \quad \text{если } h_1 \text{ и } h_2 \neq \infty;$$
$$V_{\{L_1L_2h_1h_2\}} = V_{\{D^2L_2\infty\infty\}} V_{\{L_1D^2\infty\infty\}}, \quad \text{если } h_1 = h_2 = \infty.$$

Поэтому поставленная в этой заметке задача сводится к выяснению строения операторов $V_{\{D^2L0h\}}$, $V_{\{D^2L\infty\infty\}}$ и им обратных. Мы будем формулировать теоремы только для операторов $V_{\{D^2L0h\}}$ и $V_{\{LD^2h0\}}$ $(h \neq \infty)$, хотя аналогичные результаты справедливы и для операторов $V_{\{D^2L\infty\infty\}}$, $V_{\{LD^2\infty\infty\}}$. Строение оператора $V_{\{D^2L0h\}}$ достаточно полно вскрывается следующей теоремой

Теорема 1. *Если оператор L удовлетворяет условию* (II), *то*

1) $V_{\{D^2L0h\}}[f] = f(x) + a\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x R(x, t) f(t)\,dt,$

где $a = \lim\limits_{x\to\infty} \omega_h'(0, x)$;

2) $\sup\limits_{0\leqslant x<\infty} \int_0^x |R(x, t)|\,dt = R_0 < \infty.$

В частном случае, для оператора $V_{\{D^2L00\}}$ эта теорема была ранее доказана А. Я. Повзнером ([4]). Значительно труднее поддается изучению обратный оператор $V_{\{LD^2h0\}}$. Наиболее интересен вопрос о поведении этого оператора на равномерно ограниченных на полуоси $[0, \infty)$ функциях.

Если оператор L удовлетворяет условию (II), то спектр краевой задачи для этого оператора с краевым условием $y'(0) - hy(0)$ состоит из непрерывной части, заполняющей положительную полуось $0 \leqslant \lambda < \infty$, и конечного числа собственных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$. При этом соответствующие собственные функции $\omega_h(\lambda_k, x)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ убывают при $x \to \infty$ как $e^{-x\sqrt{|\lambda_k|}}$.

Построим вспомогательный оператор P_h, определенный на всех ограниченных на полуоси $[0, \infty)$ функциях $f(x)$ равенством:

$$P_h[f] = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k}\,\omega_h(\lambda_k, x)\,\omega_h(\lambda_k, t)\,f(t)\,dt,$$

где $\alpha_k = \int\limits_0^\infty |\omega_h(\lambda_k, x)|^2 dx$. На тех же функциях оператор $V_{\{LD^2h0\}}$ можно записать в виде

$$V_{\{LD^2h0\}} = V_1 + V_2,$$

где $V_1 = V_{\{LD^2h0\}} P_h$, $V_2 = V_{\{LD^2h0\}} (E - P_h)$, т. е.

$$V_1[f] = \int\limits_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \cos x \sqrt{\lambda_k} \omega_h(\lambda_k, t) f(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda_k|}\, \omega_h(\lambda_k, t) f(t)\, dt,$$

$$V_2[f] = f(x) + \int\limits_0^\infty H(x, t) f(t)\, dt,$$

где $H(x, t)$ — некоторое вещественное ядро. Структура оператора V_1 ясна. Поэтому для выяснения строения оператора $V_{\{LD^2h0\}}$ остается исследовать ядро $H(x, t)$. Окончательный результат дает теорема 2.

Теорема 2. *Если оператор L удовлетворяет условию* (II), *то*

$$1)\ V_{\{LD^2h0\}}[f] = f(x) + \int\limits_0^\infty \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k} \operatorname{ch} x \sqrt{|\lambda_k|}\, \omega_h(\lambda_k, t) f(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^\infty H(x, t) f(t)\, dt,$$

$$2)\ \sup_{0 \leqslant x < \infty} \int\limits_0^\infty |H(x, t)|\, dt = H_0 < \infty,$$

где $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < 0$ — собственные числа краевой задачи для оператора L с краевым условием $y'(0) - hy(0) = 0$. Формула 1) *справедлива для всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty e^{-x\sqrt{|\lambda_n|}} |f(x)|\, dx < \infty$, в частности, для всех ограниченных на полуоси $[0, \infty)$ функций.*

Основные приложения сформулированных теорем к теории обобщенных почти периодических функций будут рассмотрены отдельно.

Из других приложений этих теорем укажем на следующее обобщение неравенства С. Н. Бернштейна.

Если оператор L удовлетворяет условию (II) *и функция*

$$f(x) = \sum_{i=1}^N a_i \omega_h(\nu_i, x) \tag{2}$$

ограничена на полуоси $[0, \infty)$, *то*

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} |L^m[f(x)]| \leqslant C\sigma^m \sup_{0 \leqslant x < \infty} |f(x)|, \tag{3}$$

где $\sigma = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |\nu_i|$, а константа C не зависит ни от функции $f(x)$, ни от числа $m = 1, 2, \ldots$

Подобным же образом может быть обобщено и неравенство Г. Бора.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 позволяют также полностью вскрыть структуру коммутативных нормированных колец, связанных с оператором L, которые ввел А. Я. Повзнер ([4]) и подробно исследовал З. С. Агранович ([5]).

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
27 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Марченко, ДАН, **72**, № 3 (1950). [2] J. Delsartes, Journ. de Math. pures et appl., **17**, сер. 9, 213 (1938). [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4**, в. 1 (29), 3 (1949). [4] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **23** (65), в. 1, 3 (1948). [5] З. С. Агранович, ДАН, **66**, № 6 (1949).