Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. МЕНЬШОВ

О ПРЕДЕЛАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 VII 1950)

Известно, что для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [1]. Возникает вопрос можно ли определить тригонометрический ряд по заданным пределам неопределенности, если они конечны почти всюду*. На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть даны две функции $F(x)$ и $G(x)$, измеримые на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие неравенству*

$$G(x)\leqslant F(x) \tag{2}$$

почти всюду на этом сегменте. Предположим, кроме того, что в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$, за исключением, быть может, множества меры нуль, или обе функции $F(x)$ и $G(x)$ конечны, или $F(x)=+\infty$, $G(x)=-\infty$. В таком случае можно определить тригонометрический ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n\to\infty$, для которого $F(x)$ есть верхний предел и $G(x)$ есть нижний предел почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Теорема 1 может быть получена как следствие одной теоремы о пределах неопределенности рядов Фурье — Лебега. А. Н. Колмогоров построил пример ряда Фурье от суммируемой функции, который расходится всюду [2]. Далее, Марцинкевич доказал, что существует ряд Фурье от суммируемой функции, который расходится почти всюду и пределы неопределенности которого почти всюду конечны [3]. Результат Марцинкевича является частным случаем теоремы, которая формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющей неравенству $\varphi(x)\geqslant 0$ почти всюду на этом сегменте, можно определить суммируемую функцию $f(x)$, ряд Фурье которой имеет в качестве пределов неопределенности $f(x)+\varphi(x)$ и $f(x)-\varphi(x)$***.

* Пределами неопределенности бесконечного ряда мы будем называть верхний и нижний пределы его частных сумм.

** $\varphi(x)$ может равняться $+\infty$ на множестве положительной меры. Во всех точках этого множества, в которых $f(x)$ конечна, мы полагаем $f(x)+\varphi(x)=+\infty$, $f(x)-\varphi(x)=-\infty$.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2. Возьмем две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющие условию $G(x) \leqslant F(y)$ почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, и предположим, что в каждой точке этого сегмента, за исключением, быть может, множества меры нуль, или обе функции $F(x)$ и $G(x)$ конечны, или $F(x) = +\infty$, $G(x) = -\infty$. Определим две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{F(x) - G(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{F(x) + G(x)}{2}, \tag{3}$$

если $F(x)$ и $G(x)$ конечны;

$$\varphi(x) = +\infty, \qquad \psi(x) = 0, \tag{4}$$

если $F(x) = +\infty$, $G(x) = -\infty$.

Тогда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ измеримы на $[-\pi, \pi]$, причем почти всюду на этом сегменте $\psi(x)$ конечна и $\varphi(x) \geqslant 0$.

На основании теоремы 2 мы можем определить такую суммируемую функцию $f(x)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup \sigma_n(x) = f(x) + \varphi(x), \quad \lim_{n \to \infty} \inf \sigma_n(x) = f(x) - \varphi(x) \tag{5}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, где $\sigma_n(x)$ есть сумма $n+1$ первых членов ряда Фурье от функции $f(x)$. Обозначим, для краткости, этот последний ряд через T'.

Так как $\psi(x) - f(x)$ есть измеримая функция, конечная почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то, на основании теоремы, формулированной в начале заметки ([1]), существует тригонометрический ряд T'', сходящийся к $\psi(x) - f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $\tau_n(x)$ сумму $n+1$ первых членов ряда T''. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n(x) = \psi(x) - f(x) \tag{6}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Предположим теперь, что тригонометрический ряд (1) получается в результате почленного сложения рядов T' и T''. Тогда, обозначая через $S_n(x)$ сумму $n+1$ первых членов ряда (1), будем иметь, на основании (5) и (6),

$$\lim_{n \to \infty} \sup S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sup \sigma_n(x) + \lim_{n \to \infty} \tau_n(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$\lim_{n \to \infty} \inf S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \inf \sigma_n(x) + \lim_{n \to \infty} \tau_n(x) = -\varphi(x) + \psi(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, на основании свойств функций $F(x)$, $G(x)$ и равенств (3), (4),

$$\lim_{n \to \infty} \sup S_n(x) = F(x), \quad \lim_{n \to \infty} \inf S_n(x) = G(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, т. е. почти всюду на этом сегменте $F(x)$ и $G(x)$ являются верхним и нижним пределами неопределенности тригонометрического ряда (1).

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам остается показать, что коэффициенты ряда (1) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Это немедленно следует из того, что ряд (1) получается в результате почленного сложения рядов T' и T'', коэффициенты которых обладают упомянутым свойством в силу известных теорем.

В заключение формулируем две леммы, на которые опирается доказательство теоремы 2.

Лемма А. *Возьмем произвольное действительное число* c_0, *произвольные натуральные числа* p *и* ν, $\nu > 8$, *и произвольные положительные числа* σ *и* σ', *удовлетворяющие условию* $0 < \sigma' \leqslant \sigma / \nu$. *Положим* $c_s = c_0 + \sigma s$, $a_s = c_s - \sigma'$ $(s = 1, 2, \ldots, 2p)$. *Тогда*

$$\left| \sum_{s=1}^{2p} \int_{a_s}^{c_s} \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt \right| < L\nu \frac{\sigma'}{\sigma}$$

$$(c_p + 2\sigma/\nu \leqslant x \leqslant c_{p+1} - 2\sigma/\nu, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

где L *есть абсолютная постоянная.*

Лемма Б. *Пусть заданы: сегмент* $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, *положительные числа* ε, δ, α, *положительное число* ρ, *соизмеримое с* π, *и натуральные числа* μ, q, *причем* $q > 32$, $\rho < {}^1/_4$, $\delta < \rho / 128\pi$.

Тогда можно определить функцию $\chi(x)$, *натуральное число* μ' *и измеримые множества* e, E_1, E_2, *которые обладают свойствами:*

1) $\chi(x)$ *есть ступенчатая функция на сегменте* $[a, b]$ *;

2) $\chi(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$;

3) $\int_a^b \chi(t)\, dt = \varepsilon$;

4) $\operatorname{mes} e < 2\delta(b-a)$, $e \subset [a, b]$;

5) *каждое из множеств* E_1 *и* E_2 *состоит из конечного числа открытых интервалов с концами, соизмеримыми с* $b - a$, *причем* $\operatorname{mes} E_1 = \operatorname{mes} E_2 = \rho(b-a)/64\pi$, $E_1 \subset (a, b)$, $E_2 \subset (a, b)$;

6) *для любого* $x \in E_1$ *существует такое натуральное число* $n(x)$, *что*

$$\mu < n(x) < \mu'$$

и

$$\int_a^b \chi(t) \frac{\sin n(x)(t-x)}{t-x}\, dt > \frac{\varepsilon}{b-a}\left(-\frac{L_1}{\delta} + \log q \cdot \cos\rho\right),$$

где L_1 *есть абсолютная положительная постоянная;*

7) *для любого* $x \in E_2$ *существует такое натуральное число* $\nu(x)$, *что*

$$\mu < \nu(x) < \mu'$$

и

$$\int_a^b \chi(t) \frac{\sin \nu(x)(t-x)}{t-x}\, dt < -\frac{\varepsilon}{b-a}\left(-\frac{L_1}{\delta} + \log q \cdot \cos\rho\right),$$

где L_1 *имеет прежнее значение;*

8)

$$\left| \int_a^b \chi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\left(\frac{L_2}{\delta} + \log q\right)$$

$$(x \in [-\pi, \pi] - e, \quad n = 1, 2, \ldots, \mu'),$$

где L_2 *есть абсолютная положительная постоянная;*

---

* Функция называется ступенчатой на сегменте $[a, b]$, если она постоянна на каждом из интервалов (в конечном числе), которые получаются подразделением сегмента $[a, b]$.

9)

$$\left| \int_a^b \chi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

$$(x \in [-\pi, \pi] - [a-\alpha, b+\alpha], \quad n = 1, 2, \ldots);$$

10)

$$\left| \int_a^b \chi(t) \frac{\sin n(t-x)}{t-x} dt \right|$$ [redacted]

$$(x \in [-\pi, \pi] - e, \quad n \geqslant \mu').$$

Лемма Б получается в результате применения леммы А и рассуждений, аналогичных тем, которыми пользовался А. Н. Колмогоров при построении расходящегося всюду ряда Фурье — Лебега.

Поступило
29 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Меньшов, Матем. сборн., **9** (51), 667 (1941). [2] А. Н. Колмогоров, С. R., **189**, 1327 (1926); А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, пер. Д. Райкова, 1932, стр. 175—180. [3] J. Marcinkiewicz, Fundamenta Math., **27**, 38 (1936).