Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АСИМПТОТИЧЕСКИ БЛИЗКИХ К ЛИНЕЙНЫМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 VI 1950)

В нашей заметке (1) был установлен следующий факт:

Пусть на границе S открытого множества банахова пространства E заданы два вполне непрерывных векторных поля $F_1 - I$ и $F_2 - I$ разной топологической степени.

Тогда уравнение

$$\varphi = \mu F \varphi + (1 - \mu) F_2 \varphi$$

имеет на S по крайней мере одно решение при некотором значении μ, $0 < \mu < 1$.

При помощи этого утверждения было исследовано множество собственных векторов с малой нормой нелинейных операторов, имеющих в нуле дифференциал Фреше.

В настоящей заметке мы рассматриваем в некотором смысле другой крайний случай — исследуем множество собственных векторов с большой нормой.

1. Пусть A — вполне непрерывный нелинейный оператор, действующий в банаховом пространстве E.

Будем говорить, что оператор A имеет ветвь собственных векторов с асимптотическим собственным числом λ, если множество собственных векторов оператора A, которым соответствуют собственные числа, близкие к λ (из некоторого малого интервала, содержащего λ), обладает тем свойством, что пересечение его с границей каждого открытого множества, содержащего шар достаточно большого радиуса, непусто и если собственные числа стремятся к λ, когда нормы соответствующих собственных векторов из рассматриваемой ветви неограниченно возрастают.

2. Скажем, что нелинейный вполне непрерывный оператор A, действующий в банаховом пространстве E, асимптотически близок к линейному оператору B, если

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup_{\|\varphi\| = \rho} \frac{\|A\varphi - B\varphi\|}{\rho} = 0.$$

Оператор B при этом оказывается также вполне непрерывным.

Применяя утверждение, приведенное в начале настоящей заметки, полагая $F_1 = (\lambda_k - \varepsilon) A$ и $F_2 = (\lambda_k + \varepsilon) A$, можно доказать следующее утверждение:

Теорема. *Пусть вполне непрерывный оператор A асимптотически близок к линейному B.*

Тогда каждому собственному числу λ_k нечетной кратности линейного оператора B соответствует ветвь собственных векторов оператора A с асимптотическим собственным числом λ_k.

Эта теорема позволяет установить существование собственных функций у некоторых классов нелинейных интегральных уравнений.

Приведем один пример.

Легко видеть, что нелинейный интегральный оператор типа Гаммерштейна

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)]\, dy$$

асимптотически близок в пространстве L_2 функций с суммируемым квадратом (определенных на замкнутом ограниченном множестве G конечномерного евклидова пространства) к линейному

$$B\varphi(x) = \alpha \int_G K(x, y)\varphi(y)\, dy,$$

если функция $f(y, u)$ удовлетворяет условию

$$|f(y, u) - \alpha u| < \sum_{k=1}^{n} S_k(y)\,|u|^{1-p_k} + D(y),$$

где $S_k(y) \in L_{\frac{2}{p_k}}$ $(0 < p_k < 1;\ k = 1, \ldots, n)$, $D(y) \in L_2$.

Полная непрерывность оператора A в L_2 следует из необходимых и достаточных условий непрерывности в L_2 оператора f ([2]):

$$f\varphi(x) = f[x, \varphi(x)],$$

если дополнительно требовать, чтобы ядро $K(x, y)$ удовлетворяло условию

$$\int_G\int_G K^2(x, y)\, dx\, dy < \infty.$$

Таким образом, *каждому собственному числу λ_k нечетной кратности ядра $K(x, y)$ соответствует ветвь собственных функций оператора A с асимптотическим собственным числом λ_k.*

Примеры ядер с по крайней мере одним собственным числом нечетной кратности или даже с бесконечным числом таких собственных чисел мы указали в ([1]).

3. Рассмотрим банахово пространство E вещественных вектор-функций

$$\mathbf{u}(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\} \quad (x \in G)$$

(например, E — прямая сумма n пространств C непрерывных на G функций или E — прямая сумма n экземпляров пространств L_2).

Пусть оператор A определен в E равенством

$$A\mathbf{u} = \{A_1\mathbf{u}, \ldots, A_n\mathbf{u}\},$$

где

$$A_i\mathbf{u}(x) = \int_G K_i(x, y) f_i[y, u_1(y), \ldots, u_n(y)]\, dy \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие полную непрерывность оператора A в E.

Теорема, приведенная в настоящей заметке, теорема 2 из заметки ([1]) и конусные методы позволяют установить при различных общих предположениях существование собственных вектор-функций $\{u_1(x), \ldots$

$\ldots, u_n(x)\}$ у оператора A, а в ряде случаев и существование целых семейств ветвей собственных вектор-функций.

Если оператор A имеет в точке θ дифференциал Фреше B:

$$B\mathbf{u} = \{B_1 \mathbf{u}, \ldots, B_n \mathbf{u}\},$$

где

$$B_i \mathbf{u}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_G K_i(x, y) \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(y, 0, \ldots, 0)\, u_j(y)\, dy \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то теорема 2 из заметки ([1]) позволяет утверждать, что каждому собственному числу нечетной кратности оператора B соответствует ветвь собственных вектор-функций оператора A, втекающая в θ. Существование по крайней мере одной ветви собственных вектор-функций оператора A обеспечивает, в частности, условие

$$K_i(x, y) \frac{\partial}{\partial u_j} f_i(y, 0, \ldots, 0) > 0 \quad (x, y \in G, \quad i, j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Обычные вариационные методы доказательства ([3, 4]) существования собственных функций у одного уравнения типа Гаммерштейна к исследованию систем нелинейных интегральных уравнений неприменимы. Точнее, применение этих методов позволяет установить лишь существование „обобщенных“ вектор-функций: $\mathbf{u}(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$ называется *обобщенной* собственной вектор-функцией оператора A, если найдутся такие числа $\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0$, что

$$u_i(x) = \mu_i^0 \int_G K_i(x, y) f_i[y, u_1(y), \ldots, u_n(y)]\, dy \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Существование таких обобщенных вектор-функций при различных предположениях (среди которых одно из основных — положительная определенность ядер) было установлено в ([5-7]).

Топологические методы позволяют при различных предположениях (например, условие (1)) установить существование континуума ветвей обобщенных собственных вектор-функций у систем уравнений.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
23 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, ДАН, **74**, № 1 (1950). [2] М. А. Красносельский, ДАН, **73**, № 1 (1950). [3] M. Golomb, Math. Zs., **39**, 45 (1934). [4] М. М. Вайнберг, Уч. зап. МГУ, **100**, 93 (1946). [5] А. П. Гремячинский, ДАН, **60**, 337 (1948). [6] М. М. Вайнберг, ДАН, **63**, 605 (1948). [7] М. М. Вайнберг, ДАН, **61**, 965 (1948).