Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{z^{\lambda_n}\}$ В КРУГЕ С РАДИАЛЬНЫМ ВЫРЕЗОМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 4 VII 1950)

1°. Пусть $h(z)>0$ — ограниченная интегрируемая функция в области D_0, получающейся удалением из круга $|z|<1$ радиуса $\arg z=\pi$. Отнесем к классу $H_2(h)$ все голоморфные в D_0 фунции $f(z)$, для которых существует интеграл $\iint\limits_{D_0} h(z)\,|f(z)|^2\,dx\,dy$.

Рассмотрим систему функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в плоскости z, разрезанной вдоль полуоси $(-\infty, 0)$, где $\{\lambda_n\}$ — любая последовательность возрастающих положительных чисел. Если для произвольной функции $f(z)\in H_2(h)$ $\inf\limits_{\{P_\lambda\}}\iint\limits_{D_0} h(z)\,|f(z)-P_\lambda(z)|^2\,dx\,dy=0$, где $\{P_\lambda\}$ — всевозможные суммы вида $\sum\limits_1^n a_k z^{\lambda_k}$, то говорим, что система функций $\{z^{\lambda_n}\}$ полна при весе $h(z)$.

В случае, когда $\lambda_n=n-1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, М. В. Келдышем было доказано [1], что система полиномов $\{z^n\}$ полна при весе $h(z)$, если при весе $h[z(\zeta)]$ (где $z(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta|<1$ на D_0) система полиномов $Q(\zeta)$ полна в круге $|\zeta|<1$ и

$$\liminf_{d\to 0} \ln\ln\frac{1}{h(z)} : \ln\frac{1}{d(z)}>1, \tag{1}$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до радиуса $\arg z=\pi$. В случае, когда верхний предел того же выражения меньше единицы, полнота не имеет места.

2°. Пусть $h(z)>0$ — ограниченная интегрируемая функция в области D_0, ограниченная снизу при $-\pi\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$ ($\delta>0$ любое).

Теорема. *Система функций $\{z^{\lambda_n}\}$ полна в области D_0 при весе $h(z)$, если:*

А. *При $z\in D_0$*

$$h(z)\leqslant Ah(z^{1/\alpha}), \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0, \tag{2}$$

где A и α_0 — постоянные, а функция $H(\vartheta)=\sup\limits_{0<r<1} h(re^{i\theta})$ такова, что при $\vartheta\to+0$ $v=-\dfrac{\ln H(\pi-\vartheta)}{2\vartheta}\uparrow+\infty$ и имеет обратную функцию $\vartheta=p(v)$.

Б. *Числовая функция $n(v)$ последовательности $\{\lambda_n\}$ и функция $p(v)$ связаны условием*

$$\limsup_{R\to\infty}\int_1^R\left\{n(v)\left(\frac{1}{v}+\frac{v}{R^2}\right)+p(v)-1\right\}\frac{dv}{v}=+\infty. \tag{3}$$

Следствие. *Если для последовательности $\{\lambda_n\}$*

$$\liminf_{R\to\infty}\int_1^R\left\{n(v)\left(\frac{1}{v}+\frac{v}{R^2}\right)-1\right\}\frac{dv}{v}>-\infty \tag{4}$$

(*это имеет место, например, для системы полиномов*), *то условие* Б *теоремы заменяется условием*

$$\int_0^{\delta} \ln\ln \frac{1}{H(\pi-\vartheta)} d\vartheta = +\infty. \tag{3'}$$

Действительно, если имеет место (4), то условие (3) заменяется условием $\int^{\infty} p(v)\, v^{-1} dv = +\infty$. С другой стороны,

$$\int_1^R p(v)\, v^{-1} dv = p(R) \ln R - \int_1^R \ln v\, dp(v) =$$

$$= p(R) \ln R + \int_{p(R)}^{p(1)} \left\{ \ln\ln \frac{1}{H(\pi-\vartheta)} + \ln \frac{1}{2\vartheta} \right\} d\vartheta, \tag{5}$$

и условие (3) заменяется условием (3′). Условие расходимости интеграла (3′) есть предельное усиление критерия М. В. Келдыша (1), так как при сходимости того же интеграла полнота полиномов, вообще говоря, не имеет места (2). Отметим, что условие А для веса $h(z)$ соблюдается, если $h(ze^{i\vartheta}) = H(\vartheta)$, и функция $H(\vartheta)$ не возрастает, когда $\vartheta \to \pi - 0$.

Доказательство теоремы. Достаточно установить, что если в условиях теоремы для произвольной функции $f(z) \in H_2(h)$

$$\iint_{D_0} h(z) \overline{f(z)} z^{\lambda_n} dx\, dy = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

то $f(z) \equiv 0$. С этой целью рассмотрим функцию $F(w) = \iint_{D_0} h(z) \overline{f(z)} \times$ $\times z^w\, dx\, dy$, голоморфную в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, $F(\lambda_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Оценим рост функции $F(w)$. По неравенству Буняковского имеем

$$|F(u+iv)| \leqslant A_1 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} h(re^{i\vartheta})\, e^{-2\vartheta v} d\vartheta\, d\eta \right)^{1/2}, \tag{7}$$

где A_1, A_2, ... — постоянные, не зависящие от w. Из (7) следует, что

$$|F(u+iv)| \leqslant A_2 e^{\pi|v|}. \tag{8}$$

Но при $v < 0$ можно указать точную оценку, если $|v|$ достаточно большое.

Пусть $0 < \eta \leqslant \pi(1 - 1/\alpha_0)$ и $\pi - \eta \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, тогда $1 \leqslant \frac{\vartheta}{\pi-\eta} \leqslant \alpha_0$, и, по условию А теоремы, $h(re^{i\vartheta}) \leqslant Ah\left(r^{\frac{\vartheta}{\pi-\eta}} e^{i(\pi-\eta)}\right) \leqslant AH(\pi-\eta)$.

Пусть $|v|$ достаточно большое, так что $\eta = p(|v|) \leqslant \pi(1 - 1/\alpha_0)$, тогда при $v < 0$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(re^{i\vartheta})\, e^{-r\vartheta v} d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi - p(|v|)} h(re^{i\vartheta})\, e^{2\vartheta|v|} d\vartheta + \int_{\pi-p(|v|)}^{\pi} h(re^{i\vartheta})\, e^{2\vartheta|v|} d\vartheta <$$

$$< A_3 e^{2[\pi - p(|v|)]|v|} + A_4 H(\pi - p(|v|))\, e^{2\pi|v|} = A_5 e^{2[\pi - p(|v|)]|v|}.$$

Отсюда следует, что

$$|F(u+iv)| \leqslant A_6 e^{[\pi - p(|v|)]|v|} \tag{9}$$

при $v < 0$ и достаточно большом $|v|$.

Предположим, что в условиях теоремы $F(w) \neq 0$, тогда, по формуле Карлемана (см., например, [3]) при $R \to \infty$

$$\sum_{\lambda_n < R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) \leqslant \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln |F(Re^{i\vartheta})| \cos \vartheta \, d\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_1^R \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{R^2}\right) \ln |F(iv) F(-iv)| \, dv + O(1). \tag{10}$$

Замечаем, что

$$\sum_{\lambda_n < R} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{R^2}\right) = O(1) + \int_{\lambda_1}^R \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{R^2}\right) n(v) \, dv; \tag{11}$$

тогда из оценок (8), (9) и формулы (10) имеем

$$\int_{\lambda_1}^R \left\{ n(v) \left(\frac{1}{v} + \frac{v}{R^2}\right) + p(v) - 1 \right\} \frac{dv}{v} = O(1)$$

при $R \to \infty$, что противоречит условию Б теоремы. Таким образом, $F(w) \equiv 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$F\left(\frac{n}{2}\right) = \iint_{D_0} h(z) \overline{f(z)} z^{n/2} \, dx \, dy = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Нам остается показать, что из условий (12) следует тождество $f(z) \equiv 0$. С этой целью при помощи функции $\zeta = \sqrt{z}$ конформно отобразим область D_0 на полукруг D_1 $(|\zeta| < 1, |\arg \zeta| < \pi/2)$. Тогда

$$\iint_{D_0} h(z) |f(z)|^2 \, dx \, dy = \iint_{D_1} h(\zeta^2) |2\zeta f(\zeta^2)|^2 |d\zeta|^2 < +\infty,$$

$$\iint_{D_0} h(z) \overline{f(z)} z^{n/2} \, dx \, dy = 2 \iint_{D_1} h(\zeta^2) \overline{[2\zeta f(\zeta^2)]} \zeta^{n+1} |d\zeta|^2 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначим для краткости $h(\zeta^2) = h_1(\zeta)$ и $2\zeta f(\zeta^2) = f_1(\zeta)$; тогда

$$\iint_{D_1} h_1(\zeta) \overline{f_1(\zeta)} \zeta^n |d\zeta|^2 = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Докажем, что (13) имеет место и при $n = 0$. Рассмотрим функцию $\Phi(w) = \iint_{D_1} h_1(\zeta) \overline{f_1(\zeta)} \zeta^w |d\zeta|^2$, голоморфную в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$. Нетрудно видеть, что $|\Phi(w)| = O(e^{\pi|v|})$. Предполагая, что $\Phi(w) \neq 0$ и применив формулу (10) к функции $\Phi(w)$, легко приходим к противоречию. Таким образом, $\Phi(0) = 0$ и, следовательно,

$$\iint_{D_1} h_1(\zeta) f_1(\zeta) \zeta^n |d\zeta|^2 = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13'}$$

Докажем, что система полиномов $\{P(\zeta)\}$ полна в D_1 при весе $h_1(\zeta)$, откуда и из (13') будет следовать, что $f(z) \equiv f_1(\zeta) = 0$.

Обозначим через $D_1(\beta)$ $(0 < \beta < \pi/2)$ сектор $|\zeta| < 1$, $|\arg \zeta| \leqslant \pi/2 - \beta$. После удаления из D_1 сектора $D_1(\beta)$ остаются два сектора, лежащие в верхней и нижней полуплоскостях, которые, соответственно, обозначим через $D_1^+(\beta)$ и $D_1^-(\beta)$. Выберем $\beta\,(0<2\beta<\pi/2)$ таким образом, чтобы $\frac{\pi-2\beta}{\pi-4\beta}\leqslant\alpha_0$ и для наперед заданного $\varepsilon>0$

$$\iint\limits_{D_1^+(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|^2<\varepsilon, \qquad \iint\limits_{D_1^-(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|^2<\varepsilon. \tag{14}$$

Тогда при $1<\alpha\leqslant\frac{\pi-2\beta}{\pi-4\beta}$, в силу (2),

$$\iint\limits_{D_1^+(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2\leqslant A\iint\limits_{D_1^+(\beta)} h_1(\zeta^{1/\alpha})\,|f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2,$$

откуда, после замены переменного $\tau=\zeta^{1/\alpha}$ и из неравенств $\pi/2\alpha<\pi/2$, $(\pi-2\beta)/2\alpha\geqslant\pi/2-2\beta$, следует

$$\iint\limits_{D_1^+(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2<A\alpha^2\iint\limits_{D_1^+(2\beta)} h_1(\tau)\,|f_1(\tau)|^2\,|d\tau|^2<A\alpha^2\varepsilon. \tag{15}$$

В силу ограниченности $h_1(\zeta)$ сверху и снизу в области $-\pi/2\leqslant\leqslant\arg\zeta\leqslant-\pi/2+2\beta$ и второго из неравенств (14)

$$\iint\limits_{D_1^-(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2<A_7\alpha^2\varepsilon, \tag{15'}$$

где A_7 не зависит от α. Из (14), (15) и (15′) заключаем, что

$$\iint\limits_{D_1} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)-f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2<\iint\limits_{D_1(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)-f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2+A_8\varepsilon, \tag{16}$$

где A_8 не зависит от α. Но $h_1(\zeta)$ ограничена снизу и сверху в $D_1(\beta)$, следовательно, как нетрудно видеть,

$$\lim_{\alpha\to 1+0}\iint\limits_{D_1(\beta)} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)-f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2=0. \tag{17}$$

Итак, для всякого $\varepsilon>0$ можно выбрать $\alpha>1$ такое, чтобы

$$\iint\limits_{D_1} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)-f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2<\varepsilon. \tag{18}$$

Но если $\alpha>1$, $\iint\limits_{D_1}|f_1(\zeta^{1/\alpha})|^2\,|d\zeta|^2<+\infty$, следовательно, $\inf\limits_{\{P\}}\iint\limits_{D_1}|f_1(\zeta^{1/\alpha})-$ $-P(\zeta)|^2\,|d\zeta|^2=0$, и, так как $h_1(\zeta)$ ограничена, то

$$\inf_{\{P\}}\iint\limits_{D_1} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta^{1/\alpha})-P(\zeta)|^2\,|d\zeta|^2=0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что $\inf\limits_{\{P\}}\iint\limits_{D_1} h_1(\zeta)\,|f_1(\zeta)-P(\zeta)|^2\,|d\zeta|^2=0$, чем и завершается доказательство теоремы.

Институт математики и механики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
30 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Матем. сборн., **16** (58), № 3 (1945). [2] А. Л. Шагинян, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, в. 1 (1947). [3] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, отд. III, задача 178, 1937.