Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

ФИЗИКА

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

К ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 14 VII 1950)

1. Как следует из анализа работ [1,2], составные части атомных ядер — протоны и нейтроны — по всей вероятности находятся в определенных оболочках, в известной мере подобных электронным оболочкам в атомах. Последовательное заполнение оболочек нуклеонами, очевидно, должно приводить к некоторым выделенным изотопам, аналогичным благородным газам.

„Критические" числа протонов и нейтронов подобных ядер не найдены еще с полной достоверностью.

Довольно правдоподобными, согласно ряду исследований, являются, например, следующие „магические" числа [3]: 14, 28, 50, 82, 126 и т. д., которые принимаются одинаковыми как для протонов, так и для нейтронов. Некоторым теоретическим обоснованием этих чисел явилось рассмотрение порядка уровней в некоторой потенциальной яме (прямоугольной, осцилляторной и т. д.) в задаче одного тела.

Наряду с этим была сделана попытка применения статистического метода Томаса — Ферми к данной проблеме [4], причем считалось, что между отдельными нуклеонами имеет место закон короткодействующих ядерных сил типа Юкава.

Следует отметить, что рассмотрение подобных проблем естественно затрудняется отсутствием сведений о точном законе ядерных сил. С другой стороны, однако, те или иные приближенные методы будут всегда необходимы в задаче сложных ядер, подобно ситуации для атомов, даже при наличии закона взаимодействия между отдельными электронами (см. например [5]). Мы хотим сейчас обратить внимание на то, что путем простых соображений возможно получить некоторую общую формулу для интересующих нас критических чисел, как функцию распределения плотности ядерных частиц.

При этом используется метод Ферми, примененный для вывода критических чисел электронов в атоме, иначе говоря, для квантового, хотя бы приближенного, обоснования периодов менделеевской системы.

2. Как известно, число частиц со спином $^1/_2$, угловые моменты которых лежат в границах M и $M + \Delta M$, равно, согласно статистической модели:

$$\Delta N_l = \frac{32\pi^2}{h^3} M^2 \Delta M \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{P^2}{M^2} - \frac{1}{r^2}}\, dr, \tag{1}$$

где $M = \frac{h}{2\pi}\left(l + \frac{1}{2}\right)$; $\Delta M = \frac{h}{2\pi}$ — квадрат максимального импульса P связан плотностью ρ общего числа частиц N соотношением:

$$P^2 = h^2 \left(\frac{3\rho N}{8\pi}\right)^{2/3}, \tag{2}$$

причем

$$\int \rho d\tau = 1, \tag{3}$$

где интеграл берется по всему объему.

Границы интегрирования по r распространяются на все вещественные значения подинтегрального выражения: $\left(\frac{P^2}{M^2} > \frac{1}{r^2}\right)$.

Приравнивая ΔN_l нулю, найдем числа частиц, с которых начинает заполняться оболочка с данным азимутальным квантовым числом l. Отсюда получаем выражение для числа частиц, необходимых для начала заполнения оболочки:

$$N_l = \gamma (2l+1)^3, \tag{4}$$

причем

$$\gamma = \frac{1}{24\pi^2} \cdot \frac{1}{r^3 \rho}. \tag{5}$$

В выражении (5) величина r определяется из условия, что границы интегрирования в (1) стягиваются к одной точке $r_1 = r_2$. Таким образом, интересующее нас число частиц является простой функцией плотности распределения частиц ρ и определяется фактором $\left(l + \frac{1}{2}\right)^3$, асимптотически приближающимся к l^3.

Ход дальнейших рассуждений таков. Сперва задается то или иное распределение ρ, отсюда получаем числовое значение γ. Затем, полагая l равным 0, 1, 2, 3 . ($s, p, d, \ldots$-состояния), мы будем получать числа соответствующих частиц, с которых начинается оболочка с данным l.

3. Рассмотрим несколько типичных примеров.

а) В случае распределения нуклеонов в средне-тяжелых и тяжелых ядрах лучше всего взять постоянную плотность, точнее, плотность, определяемую соотношением:

$$\rho = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}; & r < R, \\ 0\;; & r > R, \end{cases} \tag{6}$$

где R — радиус ядра.

Условие для начала заполнения оболочки в данном случае будет сводиться к равенству

$$r_1 = r_2 = R,$$

при котором, как следует из (5),

$$\gamma = \frac{1}{18\pi} = 0{,}018. \tag{7}$$

Критические числа

$$N_l = \frac{1}{18\pi} (2l+1)^3 \tag{8}$$

оказываются равными:

$$N_l = 0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 12,\ 24,\ 38,\ 60,\ 86,\ 122 \text{ и т. д.}$$

б) Переходя к случаю переменной нуклеонной плотности, непрерывным образом распространенной в пространстве, мы для определения условий равенства корней $r_1 = r_2$, т. е. условия начала образования оболочки, будем иметь следующее соотношение:

$$\frac{P^2}{M^2} = \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{d}{dr}\frac{P^2}{M^2} = -\frac{2}{r^3}.$$

Отсюда для определения r, которое мы должны подставить в соотношение (4), получаем соотношение:

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dr}\ln\rho. \tag{9}$$

В частности, в случае ядерных сил типа Юкава без учета обменных сил можно найти для плотности ρ выражение [4]:

$$\rho = \frac{4}{\pi^2 R^3}\left(\frac{R}{r}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{3/2}, \tag{10}$$

откуда найдем

$$\gamma = \frac{1}{12} = 0{,}083. \tag{11}$$

Заметим, что близкое выражение для коэффициента γ даст плотность

$$\rho = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}R^3}\,e^{-r^2/R^2}, \tag{12}$$

использованная для расчета легких ядер [6].

Расчет по формуле (11) даст нам следующие значения для замкнутых оболочек [4]: 2, 10, 28, 60, 110 ...

Из этих формул видно, что, как и следовало ожидать, в случае легких ядер лучше брать переменную плотность, а для тяжелых — постоянную. Само собой разумеется, что наши сравнительно грубые значения для плотности нуклеонов вряд ли могли бы дать критические значения чисел, точно совпадающие с экспериментом, тем более, что из опытных данных еще далеко не установлены эти значения.

Следует заметить, что статистическая теория атома приводит для определения числа электронов, начинающих l-оболочку, также к выражению типа (4), но с другим численным коэффициентом ($\gamma = 0{,}15$).

Из приведенных формул мы можем сделать некоторые качественные выводы. Именно, чем сильнее плотность возрастает к границе ядра, тем меньшее значение мы получаем для коэффициента γ и тем меньшее число частиц попадает в соответствующие оболочки.

Поскольку плотность для числа нейтронов и числа протонов в первом приближении является одинаковой, то для периодов тех и других частиц мы должны получить одно и то же значение. Однако, если учесть еще кулоновское отталкивание, которое действует между протонами, то для протонов мы должны получить более низкие значения для γ, чем для нейтронов ($\gamma_P < \gamma_N$), т. е. соответствующие критические значения для числа протонов должны быть несколько меньше, чем для числа нейтронов. Нетрудно также данным методом учесть влияние поверхностного слоя и других поправок, на чем мы здесь не останавливаемся.

Заметим, что в случае атома коэффициент $\gamma = 0{,}15$ найден из предположения, что между частицами действуют кулоновские силы. Этот коэффициент даст хорошее значение для заполнения электронных оболочек лишь для малых значений l. Для больших значений l

лучше взять коэффициент $\gamma = 0{,}17$. Увеличение коэффициента соответствует еще более резкому обрыву плотности, что, повидимому, должно быть связано с учетом обменных сил.

Заметим, что заполнение оболочек как для атома, так и для атомного ядра происходит пропорционально множителю $(2l+1)^3$, короче говоря, по предельному закону „куба целого числа".

Любопытно, что недавно на базе анализа эмпирического ряда „магических" чисел было подмечено ([7]) близкое соотношение, которое в наших обозначениях запишется в виде:

$$N_l = \frac{l^3 + 5l}{3},$$

т. е. предельное значение для величины γ для больших l равно $^1/_{24}$.

Близкое значение γ можно было получить для параболического закона распределения плотности

$$\rho = \frac{15}{8\pi R^3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

хотя не исключена возможность, что коэффициент γ для малых и больших значений l будет иметь различное значение.

Таким образом, простые статистические соотношения позволяют описать некоторые существенные стороны закономерностей распределения нуклеонов в ядрах.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 13 VII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Знойко, ДАН, 68, 1021 (1949). [2] М. А. Левитская, ДАН, **64**, 61 (1949); С. А. Щукарев, ЖОХ, № 1 (1949); Goeppert-Mayer, Phys. Rev., **74**, 235 (1948). [3] Haxen, Jensen and Suess, ibid., **75**, 1766 (1949). [4] Д. Д. Иваненко и В. И. Радичев, ДАН, **70**, 605 (1950). [5] А. А. Соколов и Б. К. Керимов, ДАН, **64**, 199 (1949). [6] Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер, Физика ядра, 1938, стр. 142. [7] Valente, Phys. Rev., **78**, 77 (1950).