Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 4 VII 1950)

Целью настоящего сообщения является изложение одного метода построения интегральных уравнений для определения вектора скорости и давления при установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости *.

Рассмотрим следующие две задачи:

1 (внутренняя). Замкнутая твердая оболочка Σ, заполненная вязкой несжимаемой жидкостью, вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$. Определить скорость и давление в жидкости.

2 (внешняя). Твердое тело, ограниченное поверхностью Σ, движется с постоянной поступательной скоростью $\mathbf{u}$ в вязкой несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Определить скорость и давление в жидкости.

Вектор скорости жидкости должен быть правильным для первой задачи и регулярным для второй. Давление должно определяться правильной функцией в первой задаче и регулярной во второй.

Отнесем движение жидкости к системе осей, скрепленных с поверхностью Σ, и обозначим через $\mathbf{Q}$ относительный радиус-вектор точки Q жидкости. Будем предполагать, что вектор массовых сил $\mathbf{F}(Q)$, действующих на жидкость, не зависит от времени; тогда движение жидкости по отношению к подвижным осям будет установившимся.

Вектор относительной скорости $\mathbf{v}_r(Q)$ и давление $P(Q)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{2}v_r^2 + \frac{1}{\rho}P\right) + [\operatorname{rot}_Q \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_r] = \mathbf{F} - \mathbf{w}_l + \nu\nabla_Q^2 \mathbf{v}_r,$$

$$\operatorname{div}_Q \mathbf{v}_r = 0; \quad \mathbf{v}_r = 0 \quad \text{на } \Sigma,$$

где $\mathbf{v}_a$ — абсолютная скорость, $\mathbf{w}_l$ — переносное ускорение. Пусть L — характерная длина и U — характерная скорость. Введем безразмерные величины

$$R\,\frac{UL}{\nu}, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{L}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{u}_a = \frac{1}{U}\mathbf{v}_a, \quad \mathbf{F}_0 = \frac{L}{U^2}\mathbf{F} - \mathbf{w}_l^0,$$

$$\mathbf{v}_l^0 = \begin{cases} \left[\dfrac{\bar{\omega}L}{U}, \mathbf{q}\right] \\ \dfrac{\mathbf{u}}{U} \end{cases} \qquad \mathbf{w}_l^0 = \begin{cases} \left[\dfrac{\bar{\omega}L}{U}\left[\dfrac{\bar{\omega}L}{U}, \mathbf{q}\right]\right], & \text{(первая задача)}, \\ 0 & \text{(вторая задача)} \end{cases}$$

---

* Этот метод в применении к задачам равновесия и движения изотропного упругого тела приводит к новым регулярным интегральным уравнениям математической теории упругости ([1,2]).

и представим уравнения движения в следующем виде:

$$\nabla_q^2 \mathbf{u}_a = R(\operatorname{grad}_q \theta + [\operatorname{rot}_q \mathbf{u}_a, \ \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_l^0] - \mathbf{F}_0),$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_a - \mathbf{v}_l^0)^2 + \frac{P}{\rho U^2}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}_q \mathbf{u}_a = 0. \tag{2}$$

Преобразованную поверхность Σ обозначим через S. В точках s поверхности S вектор $\mathbf{u}_a$ принимает значение $\mathbf{v}_l^0$. Область, занятую жидкостью, обозначим через T, а точки этой области — через q или p. Направим нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S внутрь жидкости.

Лемма. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор $\mathbf{u}_a$ (правильный для первой задачи и регулярный для второй) удовлетворял уравнению* (1), *состоит в том, чтобы он определялся через граничное значение, нормальную производную и величины θ, $\mathbf{Z} = [\operatorname{rot}_q \mathbf{u}_a, \ \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_l^0]$ в следующем виде:*

$$\mathbf{u}_a(p) = \lambda \int_T \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) \mathbf{F}_0 \, dq + \lambda \int_T \theta(q) \nabla_q \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) dq - \lambda \int_T \mathbf{Z}(q) \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) dq -$$

$$- \lambda_0 \int_S \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial n} - R\mathbf{n}\theta\right) ds + \lambda_0 \int_S \mathbf{u}_a \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) ds, \tag{A}$$

где $\lambda = R/4\pi$, $\lambda_0 = 1/4\pi$, а $\varphi(p, q)$ — гармоническая функция относительно точек p и q в области $S + T$.

Необходимость. Заменим в тождествах

$$\mathbf{u}_a(p) = -\frac{1}{4\pi} \int_T \frac{\nabla_q^2 \mathbf{u}_a}{r} dq - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{u}_a \frac{(\partial 1 \, r)}{\partial n} ds,$$

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_T \varphi \nabla_q^2 \mathbf{u}_a \, dq - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi} \int_S \mathbf{u}_a \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

величину $\nabla_q^2 \mathbf{u}_a$ из уравнения (1) и сложим результаты. После надлежащего использования теоремы Остроградского—Гаусса получим формулу (A).

Достаточность. Вычислим

$$\nabla_p^2 \mathbf{u}_a = \lambda \nabla_p^2 \int_T \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) \mathbf{F}_0 \, dq - \lambda \nabla_q^2 \int_T \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) \nabla_p \theta \, dq +$$

$$+ \lambda \nabla_p^2 \int_S \mathbf{n}\theta \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) ds - \lambda \nabla_p^2 \int_T \mathbf{Z} \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) dq -$$

$$- \lambda_0 \nabla_p^2 \int_S \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial n} - R\mathbf{n}\theta\right) ds + \lambda_0 \nabla_p^2 \int_S \mathbf{u}_a \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + \varphi\right) ds =$$

$$= -R\mathbf{F}_0 + R\nabla_p \theta + R\mathbf{Z},$$

т. е. уравнение (1) действительно имеет место.

Теорема. *Пусть функция Грина $\gamma(p, q)$ проблемы Дирихле для области $S + T$ известна: $\gamma(p, q) = G + \frac{1}{r}$ ($\gamma = 0$ на S). Построим следующую систему интегральных уравнений:*

$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}_0 + \lambda \int_T \theta(q)\, \mathbf{g}(q;\, p)\, dq - \lambda \int_T [\overline{\Omega}, \mathbf{V}]\, \gamma(q;\, p)\, dq,$$

$$\theta(p) = \theta_0 - \lambda_0 \int_T \theta(q)\, \varepsilon(q;\, p)\, dq + \lambda_0 \int_T ([\overline{\Omega}, \mathbf{V}],\, \mathbf{g}(p;\, q))\, dq, \tag{Б}$$

$$\overline{\Omega}(p) = \overline{\Omega}_0 + \lambda \int_T \theta(q)\, \mathbf{e}(p;\, q)\, dq + \lambda \int_T [[\overline{\Omega}, \mathbf{V}],\, \mathbf{g}(p;\, q)]\, dq,$$

где

$$\mathbf{g}(p;\, q) = \nabla_p \gamma, \quad \varepsilon = (\nabla_p, \nabla_q)\, G, \quad \mathbf{e}(p;\, q) = [\nabla_p, \nabla_q]\, G,$$

$$\mathbf{V}_0 = \lambda \int_T \gamma \mathbf{F}_0\, dq + \lambda_0 \int_S \mathbf{v}_l^0 \frac{\partial \gamma}{\partial n}\, ds - \mathbf{v}_l^0, \quad \theta_0 = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{div}_p \mathbf{V}_0,$$

$$\overline{\Omega}_0 = \operatorname{rot}_p \mathbf{V}_0 + \operatorname{rot}_p \mathbf{v}_l^0.$$

Если $\mathbf{V}$ *и* θ — *решения системы* (Б), *то абсолютная скорость* $\mathbf{v}_a$ *и давление* P *в жидкости имеют следующие значения:*

$$\mathbf{v}_a = U(\mathbf{V} + \mathbf{v}_l^0),$$
$$P = \rho U^2 \left(\theta - \frac{1}{2} V^2\right) + \text{const}. \tag{В}$$

Доказательство. Положим в формуле (A) $\varphi = G$. В силу граничного условия для вектора $\mathbf{V} = \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_l^0$ и для функции Грина получим первое уравнение системы (Б). Вычислим

$$\operatorname{div}_p \mathbf{V} = \operatorname{div}_p \mathbf{V}_0 + \lambda \operatorname{div}_p \int_T \theta(q) \left(\nabla_q G - \nabla_p \frac{1}{r}\right) dq - \lambda \operatorname{div}_p \int_T [\overline{\Omega}, \mathbf{V}]\, \gamma(q, p)\, dq =$$

$$= \operatorname{div}_p \mathbf{V}_0 + 4\pi\lambda\theta(p) + \lambda \int_T \theta(q)\, (\nabla_p, \nabla_q)\, G\, dq - \lambda \int_T ([\overline{\Omega}, \mathbf{V}],\, \nabla_p \gamma)\, dq$$

и учтем уравнение неразрывности (2); получим второе уравнение. Затем вычислим $\overline{\Omega} = \operatorname{rot}_p \mathbf{u}_a$:

$$\overline{\Omega}(p) = \operatorname{rot}_p (\mathbf{V}_0 + \mathbf{v}_l^0) + \lambda \operatorname{rot}_p \int_T \theta(q)\, \mathbf{g}(q, p)\, dq - \lambda \operatorname{rot}_p \int_T [\overline{\Omega}, \mathbf{V}]\, \gamma(q, p)\, dq;$$

тем самым получим третье уравнение.

Система интегральных уравнений (Б) регулярна. Она состоит в общем случае из 7 уравнений; для плоских задач система несколько упрощается и состоит из 4 уравнений.

Если движение настолько медленно, что можно пренебречь нелинейным слагаемым $[\overline{\Omega}, \mathbf{V}]$, то уравнения (Б) значительно упрощаются: в этом случае мы имеем одно линейное уравнение

$$\theta(p) = \theta_0 - \lambda_0 \int_T \theta(q)\, \varepsilon(q, p)\, dq, \tag{3}$$

решив которое, найдем

$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}_0 + \lambda \int_T \theta(q)\, \mathbf{g}(q;\, p)\, dq, \tag{4}$$

а затем вектор скорости и давление по формулам (В).

Решения системы (Б) можно искать в виде рядов, расположенных по степеням λ и λ_0:

$$\theta = \frac{1}{\lambda}\varphi + \vartheta, \quad [\overline{\Omega}, \mathbf{V}] = \overline{\psi}, \tag{5}$$

где ϑ и $\overline{\psi}$ — ряды, расположенные по возрастающим степеням чисел Рейнольдса.

Функция φ легко определяется; она удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(p) = \varphi_0 - \lambda_0 \int_T \varepsilon(p, q)\varphi(q)\,dq, \qquad \varphi_0 = -\operatorname{div}_p \mathbf{V}_0. \tag{6}$$

Функции ϑ и $\overline{\psi}$ удовлетворяют следующей системе:

$$\vartheta(p) = -\lambda_0 \int_T \varepsilon(p, q)\,\vartheta(q)\,dq + \lambda_0 \int_T (\mathbf{g}(p; q), \overline{\psi})\,dq,$$

$$\overline{\psi}(p) = \overline{\psi}_0 + \lambda \int_T \mathbf{f}(p, q)\,\vartheta(q)\,dq + \lambda \int_T E(p, q)\,\overline{\psi}(q)\,dq + \lambda^2 \overline{\psi}_2, \tag{7}$$

где векторы $\overline{\psi}_0$, $\overline{\psi}_2$, $\mathbf{f}$ и тензор E имеют такую структуру:

$$\overline{\psi}_0 = [\mathbf{k}(p), \mathbf{m}(p)],$$

$$\mathbf{k} = \lambda_0 \operatorname{rot}_p \int_S \mathbf{v}_l^0 \frac{\partial\gamma}{\partial n}\,ds + \int_T \mathbf{e}(p; q)\varphi(q)\,dq,$$

$$\mathbf{m} = \lambda_0 \int_S \mathbf{v}_l^0 \frac{\partial\gamma}{\partial n}\,ds - \mathbf{v}_l^0 + \int_T \mathbf{g}(q; p)\varphi(q)\,dq,$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{e}(p; q),\ \mathbf{m}(p)], \tag{8}$$

$$E = \{\mathbf{g}(p; q)\cdot\mathbf{m}(p)\}^* - \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Bmatrix}(\mathbf{g}(p; q), \mathbf{m}(p)) - \begin{Bmatrix} 0, & -k_z & k_y \\ k_z, & 0, & -k_x \\ -k_y, & k_x, & 0 \end{Bmatrix}\gamma(p,q),$$

$$\overline{\psi}_2 = \left[\int_T \vartheta\,\mathbf{e}\,dq + \int_T [\overline{\psi}, \mathbf{g}(p; q)]\,dq,\ \int_T \vartheta\mathbf{g}(q; p)\,dq - \int_T \overline{\psi}\gamma\,dq\right].$$

Вектор $\mathbf{V}$ имеет следующее значение:

$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}_0 - \lambda \int_T \varepsilon(p, q)\left(\frac{1}{\lambda}\varphi + \vartheta\right)dq + \lambda \int_T [\overline{\psi}, \mathbf{g}]\,dq. \tag{9}$$

Для тех задач, где число Рейнольдса настолько мало, что можно считать $\mathrm{Re}^2 = 0$, интегральные уравнения (7) обращаются в линейные. Вопрос о сходимости целых рядов

$$\vartheta = \vartheta_0 + \mathrm{Re}\vartheta_1 + \mathrm{Re}^2\vartheta_2 + \dots$$

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}_0 + \mathrm{Re}\psi_1 + \mathrm{Re}^2\psi_2 + \dots,$$

удовлетворяющих уравнениям (7), в общем случае требует специального исследования.

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
6 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Аржаных, Доклады АН Узб.ССР, № 4 (1950). [2] И. С. Аржаных, ДАН, 73, № 1 (1950).