Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1950)

Пусть $f(x)$ — непрерывная периода 2π функция. Ее интеграл Пуассона $f(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,P_r(t)\,dt$, где $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$ $(0 \leqslant r < 1)$, как известно, удовлетворяет соотношению $\Delta(f, r) = \max\limits_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f(r, x)| \underset{r\to}{\to} 0$

Если, кроме того, дополнительно указано поведение модуля непрерывности функции f, то можно судить и о быстроте убывания к нулю величины $\Delta(f, r)$, когда $r \to 1$. Некоторые оценки такого рода недавно были получены И. П. Натансоном ([1]). В частности, для функций $f(x)$, принадлежащих классу MH, т. е. удовлетворяющих условию Липшица $|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h|$, им установлено асимптотическое неравенство

$$\Delta(f, r) \leqslant \frac{2M}{\pi}(1-r)\ln\frac{1}{1-r} + O(1-r) \tag{1}$$

и показано, что с точностью до второго слагаемого в правой части (1), при $r \to 1$, это неравенство является асимптотически точным.

В настоящей работе для каждого $0 \leqslant r < 1$ я нахожу точную оценку верхней грани $\Delta(f, r)$ на классе MH и получаю, таким образом, усиление неравенства (1). Кроме того, для любого целого $p \geqslant 1$ я рассматриваю также класс $MW^{(p)}$ функций периода 2π, имеющих почти всюду производную p-го порядка, по абсолютной величине не превышающую константы M, и для каждого $0 \leqslant r < 1$ определяю точное значение верхней грани $\Delta(f, r)$ на этом классе.

Теорема 1. *Для каждого $0 \leqslant r < 1$ имеет место точное равенство*

$$\sup_{f \in MH} \Delta(f, r) = \frac{2M}{\pi}(1-r)\ln\frac{1}{1-r} + M\varepsilon_r, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{1-r}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t} + 1\right\}dt. \tag{3}$$

Примечание 1. Выражение (3) для ε_r показывает, что при $r \to 1$ справедливо асимптотическое равенство $\varepsilon_r = \frac{2}{\pi}(1+\ln 2)(1-r) + o(1-r)$.

Через K_n и $\widetilde{K}_n$, как это принято, мы в дальнейшем обозначаем известные константы Н. И. Ахиезера — М. Г. Крейна — Ж. Фавара ([2]) из теории наилучших приближений:

$$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(n+1)}}{(2m+1)^{n+1}} \quad (n \geqslant 0), \qquad \widetilde{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{(2m+1)^{n+1}} \quad (n \geqslant 1)$$

Теорема 2. *При любом целом* $p > 1$ *для каждого* $0 < r < 1$ *имеет место точное равенство:*

$$\sup_{f \in MW^{(p)}} \Delta(f, r) = M \sum_{i=1}^{p/2} \frac{1}{(2i-1)!} \widetilde{K}_{p-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{r} -$$

$$- M \sum_{i=1}^{(p-2)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{p-2i} \ln^{2i} \frac{1}{r} - M\alpha_r^{(p)}, \tag{4}$$

$$\alpha_r^{(p)} = \frac{4}{\pi} \int_r^1 \int_{t_p}^1 \cdots \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1 \cdots t_p} \operatorname{arc\,tg} t_1 \, dt_1 \ldots dt_p,$$

если p *четно, и*

$$\sup_{f \in MW^{(p)}} \Delta(f, r) = M \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{(2i-1)!} \widetilde{K}_{p-2i+1} \ln^{2i-1} \frac{1}{r} -$$

$$- M \sum_{i=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{(2i)!} K_{p-2i} \ln^{2i} \frac{1}{r} + M\beta_r^{(p)}, \tag{5}$$

$$\beta_r^{(p)} = \frac{2}{\pi} \int_r^1 \int_{t_p}^1 \cdots \int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1 \cdots t_p} \ln \frac{1+t_1}{1-t_1} \, dt_1 \cdots dt_p,$$

если p *нечетно.*

$$\sup_{f \in MW^{(p)}} \Delta(f, 0) = MK_p \quad (p \geqslant 1).$$

Примечание 2. Для суждения о поведении верхних граней (4) и (5) полезно иметь в виду, что при $r \to 1$

$$\ln \frac{1}{r} \simeq 1 - r, \quad \alpha_r^{(p)} = O\{(1-r)^p\}, \quad \beta_r^{(p)} = O\left\{(1-r)^p \ln \frac{1}{1-r}\right\},$$

в чем нетрудно убедиться непосредственно.

Примечание 3. Если сравнить равенства (2), (4) и (5) с хорошо известными оценками С. М. Никольского[3] для верхних граней отклонений дифференцируемых функций от их сумм Фейера, то обращает на себя внимание точное совпадение констант, входящих в главные части верхних граней для соответствующих p в обоих случаях. Наряду с этим следует отметить принципиальное отличие в поведении остаточных членов.

Доказательство обеих теорем будем вести одновременно. Без ограничения общности можно считать $M = 1$. Кроме того, очевидно, что при любом $p \geqslant 1$ $\sup\limits_{f \in W^{(p)}} \Delta(f, r) = \sup\limits_{f \in W^{(p)}} |f(r, 0) - f(0)|$.

Из тождества $P_r(t) = 1 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt$ $(0 \leqslant r < 1)$ в результате p-кратного $(p \geqslant 1)$ интегрирования по частям находим, что

$$f(x) - f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - r^k}{k^p} \cos\left[k(t - x) + \frac{p\pi}{2}\right].$$

Поэтому

$$\sup_{f \in W^{(p)}} \Delta(f, r) = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^{(p)}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t) F_{p,r}(t) \, dt, \tag{6}$$

где $F_{p,r}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-r^k}{k^p}\cos\left(kt+\frac{p\pi}{2}\right)$.

Нетрудно проверить, что функция $F_{p,r}(t)$ для каждого $0\leqslant r<1$ при нечетном p имеет знак, совпадающий со знаком $\pm\sin t$, а при p четном знак функции $F_{p,r}(t)-F_{p,r}(\pi/2)$ совпадает со знаком $\pm\cos t$. Поэтому, в силу периодичности $f(x)$, из (6) следует, что

$$\sup_{f\in W^{(p)}}\Delta(f,r)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left|\displaystyle\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-r^k}{k^p}\sin kt\,dt\right|, & p \text{ нечетно;}\\[2ex] \dfrac{4}{\pi}\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-r^k}{k^p}\cos kt\,dt\right|, & p \text{ четно.}\end{cases}$$

Таким образом,

$$\sup_{f\in W^{(p)}}\Delta(f,r)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(p+1)}\frac{1-r^{2k+1}}{(2k+1)^{p+1}}. \tag{7}$$

Из (7) уже непосредственно вытекает, что при $p>1$ имеем порядок: $\sup\limits_{f\in W^{(p)}}\Delta(f,r)\sim 1-r$ $(r\to 1)$.

Введем теперь в рассмотрение две функции, определенные на $[0, 1]$;

$$\varphi_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-x^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}\qquad (n\geqslant 1);$$

$$\psi_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1-x^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}}\qquad (n\geqslant 0).$$

Можно убедиться, что для $0<x\leqslant 1$ указанные функции допускают представление

$$\varphi_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_x^1\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1\cdots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}\,dt_1\cdots dt_n, \tag{8}$$

$$\psi_n(x)=\frac{4}{\pi}\int_x^1\int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1\cdots t_n}\operatorname{arc\,tg} t_1 dt_1\cdots dt_n. \tag{9}$$

В частности, $\varphi_1(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_x^1\frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}\,dt$, или, как легко видеть,

$$\varphi_1(x)=\frac{2}{\pi}(1-x)\ln\frac{1}{1-x}+\frac{2}{\pi}\int_0^{1-x}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t}+1\right\}dt.$$

Но, в силу (7), $\sup\limits_{f\in W^{(1)}}\Delta(f,r)=\varphi_1(r)$, что доказывает теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 заметим, что

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(0)\ln\frac{1}{x}-\frac{2}{\pi}\int_x^1\int_{t_n}^1\int_0^{t_{n-1}}\cdots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1t_2\cdots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}\,dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

$$\psi_n(x)=\psi_{n-1}(0)\ln\frac{1}{x}-\frac{4}{\pi}\int_x^1\int_{t_n}^1\int_0^{t_{n-1}}\cdots\int_0^{t_2}\frac{1}{t_1t_2\cdots t_n}\operatorname{arc\,tg} t_1\,dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

после чего, в силу рекурентных соотношений

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(0)\ln\frac{1}{x} - \int_x^1 \frac{1}{t}\varphi_{n-1}(t)\,dt,$$

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(0)\ln\frac{1}{x} - \int_x^1 \frac{1}{t}\psi_{n-1}(t)\,dt,$$

получим

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\varphi_{n-k}(0)\int_x^1\int_{t_1}^1\cdots\int_{t_{k-1}}^1 \frac{dt_1\cdots dt_k}{t_1\cdots t_k} +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{2}{\pi}\int_x^1\int_{t_n}^1\cdots\int_{t_2}^1 \frac{1}{t_1\cdots t_n}\ln\frac{1+t_1}{1-t_1}\,dt_1\cdots dt_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\varphi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{x} + (-1)^{n-1}\beta_x^{(n)},$$

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\psi_{n-k}(0)\ln^k\frac{1}{x} + (-1)^{n-1}\alpha_x^{(n)}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 остается еще воспользоваться равенствами:

$$\sup_{f\in W^{(2q+1)}}\Delta(f,r) = \varphi_{2q+1}\;(q\geqslant 0); \qquad \sup_{f\in W^{(2q)}}\Delta(f,r) = \psi_{2q}(r)\;(q\geqslant 1),$$

$$\varphi_n(0) = \begin{cases} K_n, & n=2m+1,\\ \widetilde{K}_n, & n=2m; \end{cases} \qquad \psi_n(0) = \begin{cases} K_n, & n=2m,\\ \widetilde{K}_n, & n=2m+1. \end{cases}$$

Примечание 4. Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как обобщение известного неравенства С. Н. Бернштейна ([4]), к которому они сводятся при $r=0$.

Примечание 5. Можно было бы показать, что теорема 1 остается в силе, если верхнюю грань в равенстве (2) распространить на более широкий класс квази-гладких функций, т. е. непрерывных периода 2π функций, удовлетворяющих равномерно на всей вещественной оси условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant 2M|h|. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, вытекает:

Следствие. *Для всякой непрерывной периода 2π функции, удовлетворяющей условию* (10) *равномерно на вещественной оси и имеющей среднее значение по периоду, равное нулю, справедливо неравенство* $|f(x)| \leqslant {}^1/_2\,\pi M$. *Оно является точным.*

Поступило
25 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, ДАН, **72**, № 1 (1950). [2] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947. [3] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 15 (1945). [4] С. Н. Бернштейн, С. R., **200** (1935).