Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

А. ПОВЗНЕР

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VII 1950)

Мы дадим в этой заметке приложение некоторых результатов работы ([1]). Обозначения заимствованы из ([1]).

Пусть γ есть некоторая простая, кусочно-гладкая кривая, ограничивающая односвязную область C. Совокупность регулярных внутри C функций $f(z)$ с $\int\limits_{\gamma} |f(z)|^2 |dz| < \infty$ обозначим через H_γ. H_γ есть g-пространство, если скалярное произведение определить как $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} f(z)\, \overline{g(z)}\, |dz|$. Для круга, взяв за ортонормированную систему z^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим из формулы (5) заметки ([1]):

$$g(z, \zeta) = \frac{1}{1 - z\bar{\zeta}}. \tag{1}$$

Общая формула для $g(z, \zeta)$ имеет вид

$$g(z, \zeta) = \frac{\sqrt{\psi'(z)}\,\sqrt{\overline{\psi'(\zeta)}}}{1 - \psi(z)\,\overline{\psi(\zeta)}}, \tag{2}$$

где $\psi(z)$ отображает конформно область C на единичный круг. Если внутри круга задать последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$, то детерминантный критерий ([1]) для того, чтобы эта последовательность была последовательностью единственности, даст, с помощью (1), известный критерий Бляшке. Подстановка (1) в формулы (7)—(9) заметки ([1]) даст формулы Уолша ([4]).

g-пространством является также пространство H_D функций $f(z)$, регулярных внутри односвязной области D со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D} f(z)\,\overline{g(z)}\,dx\,dy \quad (z = x + iy).$$

Для круга g-функция этого пространства имеет вид

$$g(z, \zeta) = \frac{1}{(1 - z\bar{\zeta})^2}. \tag{3}$$

Пространства H_γ и H_D обладают A-свойством. Эти пространства рассматривались впервые Сеге ([2]) и Карлеманом ([3]). Обобщения этих про транств для многосвязных областей рассматривались в ряде работ С. Бергманом ([6]). Отметим, что рассматриваемая С. Бергманом функция ядра есть g-функция соответствующих пространств.

Пусть $\tau(\rho)$ — непрерывная для $0 \leqslant \rho < \infty$ функция и такая, что $\tau(0)=0$, $\int\limits_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\rho^n\,d\rho < \infty$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Построим пространство H_τ, состоящее из регулярных во всей плоскости функций $f(z)$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} e^{-\tau(\rho)} f(\rho e^{i\vartheta})\,\overline{g}(\rho e^{i\vartheta})\,d\rho\,d\vartheta.$$

Нетрудно показать, что H_τ есть g-пространство, обладающее A-свойством. Ортогональная последовательность $1, z, z^2, \ldots$ плотна в H_τ. Ортонормировав эту последовательность, получим для g-функции H_τ:

$$g(z,\zeta)=\sum_0^\infty \frac{z^k\,\overline{\zeta}^k}{C_k}=\psi(z,\overline{\zeta}),\ \text{где}\ C_k=\int\limits_0^\infty e^{-\tau(\rho)}\rho^{2k}\,d\rho,\ \ \psi(w)=\sum_0^\infty\frac{w^k}{C_k}. \qquad (4)$$

В частности, при $\tau(\rho)=2p\rho$ $(p>0)$ получим $\psi(w)=2p\cos h\,(2p\sqrt{w})$. Пространство H_τ в этом случае содержит все функции экспоненциального типа меньше p и тип функции из $H_{2p\rho}$ не может превосходить p.

Формула (7) заметки ([1]) доказывает следующую теорему:

Т е о р е м а 1. *Если последовательность $a_1, a_2, \ldots$ является последовательностью единственности пространства H_τ, то $f(z)\subset H_\tau$ может быть построена с помощью счетного процесса по ее значениям в точках a_n. Процесс построения дается формулами* (7) *и* (8) *заметки* ([1]).

Перейдем теперь к некоторым приложениям к задачам интерполяции. Мы остановимся только на процессе Ньютона, хотя аналогичные соображения применимы и к другим интерполяционным процессам (например, процессу Лагранжа).

Поставим задачу: найти достаточные условия для того, чтобы регулярная в правой полуплоскости функция $F(z)$ допускала разложение вида

$$f(z)=\beta_0+\beta_1(z-1)+\beta_2(z-1)(z-2)+\ldots \quad (\operatorname{Re}(z)>0). \qquad (5)$$

Возьмем некоторый вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, $c\alpha_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$; положим

$$K_\alpha(z,v)=1+\sum_{k=1}^\infty \alpha_k(z-1)\ldots(z-k)\overline{(v-1)\ldots(v-k)},$$

и пусть этот ряд сходится для всех пар (z,v) при $\operatorname{Re}(z)>p_\alpha$ $\operatorname{Re}(v)>p_\alpha$. Ядро $K_\alpha(z,v)$ позитивно на множестве $\operatorname{Re}(z)>p_\alpha$. Составим g-пространство H_{K_α}. Полагая $\mathfrak{A}_l=K_\alpha(z,l)$ и $u_1=1$, $u_s=\sqrt{\alpha_s}\,(z-1)\ldots[z-(s-1)]$, получим, что u_s есть линейная комбинация $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_s$ и, так как $(u_s,\mathfrak{A}_l)=0$ $(l>s)$, то $u_1,u_2,\ldots$ образует полную ортонормированную систему в H_{K_α}. Поэтому каждый элемент $F(z)\subset H_{K_\alpha}$ допускает разложение (5) при $\operatorname{Re}(z)>p_\alpha$. Выбирая различные векторы α, можно искать достаточные условия для того, чтобы данная $F(z)$ была в H_{K_α}. Если $p_\alpha<0$ или если $F(z)\subset H_{K_\alpha}$ для множества векторов α таких, что $p_\alpha>0$, но 0 является предельной точкой множества p_α, то $F(z)$ допускает разложение (5) при $\operatorname{Re}(z)>0$.

Применим в несколько измененном виде эти соображения, положив

$$K_\alpha(z,v)=\alpha\left(1+\frac{z\overline{v}}{1\cdot\alpha}+\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\frac{\overline{v(v-1)}}{\alpha(\alpha+1)}+\ldots\right)=\alpha\Gamma(\alpha)\,\frac{\Gamma(z+\overline{v}+\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)\,\Gamma(\overline{v}+\alpha)}. \qquad (6)$$

Ряд (6) сходится при $\mathrm{Re}(z+\overline{v}+\alpha)>0$. Пусть $-1<\alpha<0$. Тогда $K_\alpha(z, v)$ позитивно на множестве $\mathrm{Re}(z)>-\alpha/2$.

Из интегрального представления для Г-функции вытекает

Теорема 2. *Пространство H_{K_α} состоит из всех функций $F(z)$, представимых в виде*

$$F(z)=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)}\int_0^\infty e^{-t}\,t^{z+\alpha-1}f(t)\,dt, \tag{7}$$

где $f(t)$ — любая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}|f(t)|^2\,dt<\infty. \tag{8}$$

Норма $F(z)$ и H_{K_α} определяется из

$$\|F\|^2=\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}\,|f(t)|^2\,dt. \tag{9}$$

Положим $w_k(z)=\dfrac{z(z-1)\ldots(z-k)}{\sqrt{(k+1)!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}}$ $(k=1, 2, \ldots,)$, $w_0(z)=z$ и $T_\alpha(z, v)=K_\alpha(z, v)-\alpha=\sum\limits_0^\infty w_k(z)\,\overline{w_k(v)}$. Элементы $w_k(z)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированную систему в H_{T_α}.

Лемма 1. $H_{K_\alpha}\subset H_{T_\alpha}$ *и* $\|h\|_{T_\alpha}\leqslant\|h\|_{K_\alpha}$ *для* $h\subset K_\alpha$.

Из леммы немедленно следует:

Теорема 3. *Любая функция $F(z)\subset H_{K_\alpha}$ допускает представление*

$$F(z)=\sum_{k=0}^\infty \alpha_k\,w_k(z),\qquad \sum_{k=0}^\infty|\alpha_k|^2<\infty. \tag{10}$$

Коэффициенты α_k в теореме 3 равны:

$$\alpha_k=\alpha\Gamma(\alpha)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{\alpha-1}f(t)\,\frac{(-1)^{k+1}\left[L_{k+1}^{\alpha-1}(t)-L_{k+1}^{\alpha-1}(0)\right]}{\sqrt{(k+1)!\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}}\,dt, \tag{11}$$

где $L_{n+1}^{\alpha-1}(t)$ есть полином Лагерра относительно веса $e^{-t}\,t^{\alpha-1}$. Функция $f(t)$ взята из (7).

Теорема 4. *$F(z)\subset H_{K_\alpha}$ допускает представление*

$$F(z)=\beta_0+\beta_1(z-1)+\beta_2(z-1)(z-2)\ldots, \tag{5'}$$

сходящееся при $\mathrm{Re}(z)\geqslant 1$.

Ряд (5′) сходится для тех и только тех z, для которых

$$\lim_{n\to 0}\frac{\alpha_n}{n^{\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}}=0\quad(\alpha_n \text{ из } (10)).$$

Норлундом ([5]) был введен класс $\mathfrak{N}$ функций $F(z)$, регулярных в правой полуплоскости и удовлетворяющих там условию

$$F(re^{i\vartheta})\leqslant e^{r\psi(\vartheta)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\quad \beta\leqslant\frac{-1}{2},$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$ и $\psi(\vartheta) = \cos\vartheta \ln(2\cos\vartheta) + \vartheta \sin\vartheta$. Им было показано, что функции из $\mathfrak{N}$ допускают разложение (5') при $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Теорема 5. *Если $F \subset \mathfrak{N}$, то $F(z) - F(-\alpha) \subset H_{K_\alpha}$ при любом α из открытого интервала* $(-1, 0)$.

Теорема Норлунда получается как следствие из теорем 4, 5. Класс функций, удовлетворяющих условию теоремы 4, шире класса $\mathfrak{N}$.

Укажем теперь на приложение g-пространств к теории квазианалитических функций.

Рассмотрим класс T функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, имеющих производные любого порядка и таких, что $\int\limits_0^\infty |f^{(k)}(t)|^2\,dt \leqslant A_k^2$ $(k = 0, 1, \ldots)$, где A_k — заданные константы. Константы определяют квазианалитический класс, если из $f \subset T$, $f^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ следует $f(x) = 0$. Легко видеть, что класс тогда и только тогда квазианалитичен, если гильбертово пространство H функций $f \subset T$, $f^{(k)}(0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ с нормой $\|f\|^2 = \sum\limits_{k=0}^\infty \frac{1}{A_k^2} \int\limits_0^\infty |f^{(k)}(t)|^2\,dt$ пусто. H есть g-пространство.

Легко видеть, что его g-функция есть предел g-функций g_n пространств H_n с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_0^n \frac{1}{A_k^2} \int_0^\infty |f^{(k)}(t)|^2\,dt, \quad f^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Для квазианалитичности класса необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x, x) = 0.$$

Но

$$g_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 E_n(x+t)\,\overline{E}_n(y+t)\,dt,$$

где

$$E_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{R_n(s)} e^{ist}\,ds, \quad R_n(s) = \left(1 - \frac{z}{b_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{b_n}\right),$$

а $b_1, b_2, \ldots$ — корни уравнения $\frac{1}{A_0^2} + \frac{z^2}{A_1^2} + \ldots + \frac{z^{2n}}{A_n^2} = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Переход к пределу даст известный критерий квазианалитичности Карлемана.

Научно-исследовательский
Институт математики и механики
Харьковского государственного
университета

Поступило
20 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Повзнер, ДАН, 68, № 5 (1949). [2] Szegö, Math. Zs., 9, 218. [3] Carleman, Ark. för Math., 17, No. 9. [4] Walsh, Interpolation and Approximation by Rat. Functions, Am. Math. Soc. Coll. Publ., 305. [5] Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation. [6] С. Бергман, Изв. Н.-и. ин-та матем. и мех. при Томск. гос. ун-те, 1, в. 3 (1937).