Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

ОБ ОДНОМЕРНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ИНТЕРВАЛЕ $(0, \infty)$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 V 1950)

В нашей недавней заметке (1), посвященной построению теории бесконечных J-матриц, мы указали, что эта теория представляет, в частности, интерес еще тем, что она может служить алгебраической моделью для соответствующих построений в теории краевых задач с одним сингулярным концом.

В настоящей заметке приводятся результаты этих построений, проведенных на основе наших общих исследований по спектральной теории операторов (2-4).

Формулируемые нами теоремы в полном их объеме, повидимому, не были известны даже для сингулярных краевых задач второго порядка (см. (5-7)).

Наша задача получила более ясную перспективу благодаря интересным исследованиям И. М. Глазмана (8,9).

1. Пусть $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots$, $p_n(x)$ — определенные в интервале $0 \leqslant x < \infty$ вещественные измеримые функции, удовлетворяющие при любом $x > 0$ условиям

$$\int_0^x |p_0(x)|^{-1}\, dx < \infty, \quad \int_0^x |p_k(x)|\, dx < \infty, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Через Ω обозначим класс всех комплекснозначных функций $y(x) \in L_2(0, \infty)$, абсолютно непрерывных вместе со всеми своими производными до $(n-1)$-го порядка (включительно) и обладающих еще тем свойством, что для них абсолютно непрерывны последовательно составляемые функции:

$$D^{[n]}y = p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \quad D^{[n+k]}y = p_k \frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx} D^{[n+k-1]}y \ (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

а функция

$$D^{[2n]}y = p_0 y - \frac{d}{dx} D^{[2n-1]}y =$$

$$= p_0 y - \frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}\left(p_2 \frac{d^2 y}{dx^2} - \ldots - \frac{d}{dx}\left(p_n \frac{d^n y}{dx^n}\right) \ldots\right)\right)$$

принадлежит $L_2 = L_2(0, \infty)$.

Функции $y(x) \in \Omega$ отнесем два n-мерных вектор-функционала

$$\mathfrak{y}_0(y) = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})_{x=0}, \quad \mathfrak{y}_1(y) = (D^{[2n-1]}y, D^{[2n-2]}y, \ldots, D^{[n]}y)_{x=0}.$$

Пусть теперь $A = \|a_{ik}\|_1^n$ — произвольная эрмитова матрица. Обозначим через $\overset{0}{\Omega}_A$ совокупность всех финитных (т. е. обращающихся в тождественный нуль при достаточно больших x) функций из Ω, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\sin A\mathfrak{y}_0(x) + \cos A\mathfrak{y}_1(y) = 0. \tag{1}$$

Если рассматривать оператор $D^{[2n]}$ как оператор, действующий только на $\overset{0}{\Omega}_A$ в L_2, то он окажется эрмитовым оператором. Замыкание этого эрмитова оператора обозначим через D_A, а его область определения — через Ω_A.

Эрмитов оператор D_A имеет конечный индекс дефекта (m, m), не зависящий от выбора матрицы A.

Число m совпадает с числом линейно независимых решений из L_2 (точнее — из Ω) дифференциальной системы, состоящей из уравнения

$$D^{[2n]}\varphi - \lambda\varphi = 0 \tag{2}$$

λ — любое невещественное число) и граничных условий (1).

Если $m = 0$, то Ω_A совпадает с множеством Ω_A^* всех функций $f \in \Omega$, удовлетворяющих (1); если же $m > 0$, то Ω_A составляет правильную часть Ω_A^*, которую также нетрудно охарактеризовать (см. ([9])); при этом всегда $D_A f = D^{[2n]} f$ $(f \in \Omega_A)$.

Вопреки ошибочным утверждениям В. Виндау ([10]) и Д. Шина ([11]), И. М. Глазман ([8]) показал, что дефект m при том или ином выборе функций $p_0, p_1, \ldots, p_n$ может принимать любое из значений $0, 1, 2, \ldots, m$.

Пусть R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ — одна из резольвент оператора D_A, т. е. резольвента одного из самосопряженных расширений $\widetilde{D}_A$ оператора D_A: $R_\lambda = (\widetilde{D}_A - \lambda I)^{-1}$.

Резольвенте R_λ отвечает непрерывное ядро $R(x, s; \lambda)$ $(0 \leqslant x, s < \infty, \operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ такое, что для любого $f \in L_2$ (см. ([9])):

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty R(x, s; \lambda) f(s)\, ds.$$

Обозначим через $\varphi_j(x; \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ решения дифференциального уравнения (2), выделяемые начальными условиями;

$$\mathfrak{y}_0(\varphi_j) = \cos Ae_j, \quad \mathfrak{y}_1(\varphi_j) = -\sin Ae_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $e_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ — орты n-мерного пространства:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Обозначим через $\Phi(x; \lambda)$ вектор $(\varphi_1(x; \lambda), \ldots, \varphi_n(x; \lambda))$, который мы будем мыслить как матрицу, состоящую из одной колонны. Через $\Phi^*(x; \lambda)$ обозначим матрицу, транспонированную и комплексно сопряженную с $\Phi(x; \lambda)$, т. е. матрицу, состоящую из одной строчки $(\overline{\varphi_1(x; \lambda)}, \ldots, \overline{\varphi_n(x; \lambda)})$.

Пусть, кроме того, V_n обозначает класс всех эрмитовых матриц функции $\boldsymbol{T}(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^n$ $(\boldsymbol{T}(0) = 0,\ \boldsymbol{T}(\lambda - 0) = \boldsymbol{T}(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty)$, которым отвечает неубывающая форма

$$\xi^* \boldsymbol{T}(\lambda)\xi = \sum_{j,\,k=1}^{n} \tau_{jk}(\lambda)\xi_k\overline{\xi}_j.$$

Метод направляющих функционалов ([2,3]) позволяет весьма просто доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Всякой резольвенте R_λ оператора D_A отвечает единственная матрица-функция $\boldsymbol{T}(\lambda) \in V_n$ (спектральная матрица) такая, что при любых невещественных z, ζ*

$$R(x, s; z) - R(x, s; \zeta) = (z-\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^*(s; \lambda)\, d\boldsymbol{T}(\lambda)\, \Phi(x; \lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - \zeta)}, \tag{2}$$

причем стоящий справа несобственный интеграл сходится абсолютно равномерно в каждом конечном квадрате $0 \leqslant x,\ s \leqslant L$ $(0 < L < \infty)$.

Если же при некотором a:

$$\boldsymbol{T}(\lambda) \equiv 0 \quad \textit{при } \lambda \leqslant a, \tag{4}$$

то имеет место также разложение

$$R(x, s; z) = \int_a^{\infty} \frac{\Phi^*(s; \lambda)\, d\boldsymbol{T}(\lambda)\, \Phi(x; \lambda)}{\lambda - z}. \tag{5}$$

Каждое из разложений (3) *и* (5) *сходится абсолютно равномерно во всяком конечном квадрате $0 \leqslant x, s \leqslant L$ $(0 < L < \infty)$, и это свойство этих разложений сохраняется при почленном их дифференцировании k раз по x и l раз по s $(0 \leqslant k, l \leqslant n-1)$.*

2. Для финитных функций $f(x)$ из L_2 имеет смысл преобразование:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(s)\, \Phi^*(s; \lambda)\, ds, \quad F^*(\lambda) = \int_0^{\infty} \overline{f(s)}\, \Phi(s; \lambda)\, ds.$$

Вводя в рассмотрение гильбертово пространство $L_T^{(2)}$, порождаемое матрицей $\boldsymbol{T}(\lambda)$ (см. о нем в ([4]), § 3), можно утверждать следующее.

Теорема 2. *Для того чтобы некоторая матрица-функция $\boldsymbol{T}(\lambda) \in V_n$ была спектральной матрицей оператора D_A, необходимо и достаточно, чтобы по отношению к ней преобразование $f(x) \to F(\lambda)$ (финитных функций $f(x)$ из L_2 в вектор-функции $F(\lambda)$) было изометрическим, т. е.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\boldsymbol{T}(\lambda)\, F^*(\lambda) = \int_0^{\infty} |f(s)|^2\, ds, \tag{6}$$

и чтобы замыкание этого отображения давало унитарное отображение $f \to Uf$ всего L_2 на все $L_T^{(2)}$.

Если $m = 0$, то оператору D_A отвечает единственная спектральная матрица $\boldsymbol{T}(\lambda)$ и она вполне определяется одним свойством (6).

Метод получения теоремы 4, как и ряда других теорем типа Парсеваля — Планшереля, указан автором в ([2,3]). В случае $m > 0$ наши методы позволяют указать правило определения всех матриц $\boldsymbol{T}(\lambda) \in V_n$, обладающих свойством (6).

3. Сочетание теорем 1 и 2 приводит к следующим результатам.

Теорема 3. *Если $f \in \Omega_A$, а $F(\lambda) = Uf$, то для $k = 0, 1, \ldots, n-1$*

$$D^{[k]}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\boldsymbol{T}(\lambda) D_x^{[k]}\Phi(x; \lambda), \tag{7}$$

причем все эти разложения сходятся абсолютно равномерно в каждом конечном интервале $0 \leqslant x \leqslant L$.

Если функции $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ непрерывны, а $p_0(x) \geqslant 0$, то утверждение сохраняет силу также и для $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$.

Здесь $D^{[k]}$ при $k < n$ означает обычный оператор кратного дифференцирования d^k / dx^k.

Обозначим через (P_A) совокупность всех линейных граничных условий, вытекающих из условий (1) и связывающих только величины $y(0)$, $y'(0)$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0)$.

Теорема 4. *При выполнении условия (4) абсолютно равномерно сходящиеся в каждом конечном интервале разложения* (7) *с $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имеют место для всякой функции $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, обладающей следующими свойствами:*

1) *функция $f(x)$ абсолютно непрерывна вместе со всеми своими производными $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$;*

2) *функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям (P_A);*

3) $\int\limits_0^{\infty} |p_{n-k}(x)|\, |f^{(k)}(x)|^2\, dx < \infty \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Из-за недостатка места здесь опущены результаты, аналогичные тем, которые мы недавно получили для краевых задач второго порядка ([12]).

Теоремы 1 и 4 суть обобщения соответствующих теорем, установленных нами для несингулярной краевой задачи ([13]).

Поступило
11 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 69, № 2 (1949). [2] М. Г. Крейн, ДАН, 53, № 1 (1946). [3] М. Г. Крейн, Збірник праць Ін-ту матем. АН УРСР, № 10 (1948). [4] М. Г. Крейн, Украинск. матем. журн., № 2 (1949). [5] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950. [6] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expantions Associated with Second-order Differential Equations, Oxford, 1946. [7] K. Kodaira, Am. Journ., 71, No. 4 (1949). [8] И. М. Глазман, ДАН, 64, № 2 (1949). [9] И. М. Глазман, К теории сингулярных квази-дифференциальных операторов, Диссертация, Харьков, 1949. [10] W. Windau, Math. Ann., 83 (1921). [11] Д. Шин, Матем. сбор., 7 (49), 3 (1940). [12] М. Крейн, ДАН, 73, № 6 (1950). [13] М. Крейн, Матем. сборн., 21 (63), 3 (1947).