Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ОБ ОДНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 VI 1950)

1. Пусть F — вполне непрерывный оператор, определенный на границе S ограниченного открытого множества, содержащего нуль θ вещественного банахова пространства E. Пусть E_n — подпространство, с достаточной точностью апроксимирующее компактное множество FS. Пусть P_n — непрерывный оператор „проектирования" на E_n (оператор P_n не обязательно линейный — см. [1]). Под топологической степенью [1, 2] вполне непрерывного векторного поля $F-I$ без нулевых векторов на S (через I обозначен оператор тождественного преобразования) понимают степень отображения $a(P_n F-I)$, где a — нормирующий множитель, множества $S\cap E_n$ на $(n-1)$-мерную единичную сферу.

Без особых затруднений устанавливается, что топологическая степень вполне непрерывного векторного поля обладает почти всеми свойствами (см., например, [3]) степени конечномерных полей. Например, на вполне непрерывные векторные поля на сфере переносится теорема Хопфа о классификации полей:

Для того чтобы два вполне непрерывных векторных поля без нулевых векторов на сфере S банахова пространства E были гомотопны, необходимо и достаточно, чтобы их топологические степени были одинаковы.

Для случая гильбертова пространства это утверждение было установлено Роте [4].

2. Из того факта, что топологические степени гомотопных полей одинаковы, следует

Теорема 1. *Пусть на S заданы два вполне непрерывных векторных поля F_1-I и F_2-I разной топологической степени.*

Тогда уравнение

$$\varphi=\mu F_1\varphi+(1-\mu)F_2\varphi \tag{1}$$

имеет на S по крайней мере одно решение при некотором значении μ, $0<\mu<1$.

Можно показать, что теоремы о собственных функциях нелинейных операторов на сферах, установленные в [5, 6], соответствуют простейшему случаю нашей теоремы, в них $F_2\equiv 0$ (степень поля $-I$ равна единице), а топологическая степень поля F_1-I равна нулю.

3. Пусть A — вполне непрерывный нелинейный оператор, определенный в некоторой окрестности нуля θ пространства E. Пусть $A\theta=\theta$.

Элемент $\varphi_0\in E$, $\varphi_0\neq\theta$, называется собственным вектором оператора A, если найдется такое число λ_0, что

$$\varphi_0=\lambda_0 A\varphi_0.$$

Будем говорить, что оператор A имеет ветвь собственных векторов, втекающую в θ с собственным числом μ, если множество собственных векторов оператора A, которым соответствуют собственные числа, близкие к μ (из некоторого интервала, содержащего μ), обладает тем свойством, что пересечение его с границей каждого открытого множества (достаточно малого диаметра и содержащего θ) непусто и если собственные числа стремятся к μ, когда нормы соответствующих собственных векторов из рассматриваемой ветви стремятся к нулю.

Применяя теорему 1, можно установить, полагая $F_1 = (\lambda_k - \varepsilon) A$ и $F_2 = (\lambda_k + \varepsilon) A$, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть оператор A имеет в точке θ дифференциал Фреше B.*

Тогда каждому собственному числу λ_k нечетной кратности линейного оператора B соответствует ветвь собственных векторов оператора A, втекающая в θ с собственным значением λ_k.

Эта теорема является обоснованием обычно применяемой линеаризации при определении вещественных точек ветвления малых решений в случае, когда собственные числа линеаризованного уравнения имеют нечетную кратность.

Применим теорему 2 к изучению интегральных уравнений.

Будем предполагать, что приводимые ниже интегральные операторы вполне непрерывны в пространстве C вещественных функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве G конечномерного евклидова пространства.

Оператор A типа Лихтенштейна

$$A\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_G \cdots \int_G K_n(x, y_1, \ldots, y_n)\, \varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \tag{2}$$

имеет дифференциал Фреше

$$B\varphi(x) = \int_G K_1(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Оператор A типа Гаммерштейна

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)\, f[y, \varphi(y)]\, dy \tag{3}$$

в предположении существования $f'_u(x, u)$ имеет дифференциал Фреше

$$B\varphi(x) = \int_G K_1(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

где

$$K_1(x, y) = K(x, y) \frac{\partial}{\partial u} f(y, 0).$$

Оператор A вида

$$A\varphi(x) = \int_G K[x, y, \varphi(y)]\, dy, \tag{4}$$

где функция $K(x, y, u)$ непрерывна по всем переменным вместе с $K_1(x, y) = K'_u(x, y, 0)$, имеет дифференциал Фреше

$$B\varphi(x) = \int_G K_1(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Каждому собственному числу λ_k нечетной кратности ядра $K_1(x, y)$ соответствует ветвь собственных функций интегрального нелинейного оператора A (типа (2), (3) *или* (4)), *втекающая в θ с собственным значением λ_k.*

Примерами ядер, имеющих собственные числа нечетной кратности могут служить знакопостоянные ядра (см., например, [7]).

В некоторых случаях можно утверждать, что существует бесконечное количество ветвей собственных функций оператора A. Например, это будет тогда, когда $K_1(x, y)$ — осцилляционное ядро или функция Грина уравнения Штурма — Лиувилля.

4. Рассмотрим один частный случай, когда можно сделать дополнительные заключения о структуре множества собственных функций нелинейного оператора.

Пусть $v_0(x)$ — решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)] dy, \tag{5}$$

соответствующее значению параметра $\lambda = \lambda_0$, причем пусть у линейного уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \frac{\partial}{\partial u} f[y, v_0(y)] \varphi(y) dy \tag{6}$$

λ_0 не является собственным числом.

Следуя Н. Н. Назарову, будем говорить, что решение $v_0(x)$ можно **продолжить**, если существует хотя бы одно такое непрерывное семейство $v(\lambda; x)$ решений уравнения (5), что $v(\lambda_0; x) \equiv v_0(x)$.

Существование продолжений решения $v_0(x)$ в предположении аналитичности $f(x, u)$ по u было установлено Гаммерштейном [8] (при дополнительном предположении положительной определенности ядра $K(x, y)$) и Н. Н. Назаровым [9]. Следует отметить, что, несмотря на большую общность результатов, рассуждения Н. Н. Назарова проще. М. М. Вайнберг, вернувшись к предположению Гаммерштейна о непрерывности, симметричности и положительной определенности ядра $K(x, y)$, обнаружил [10], что решение $v_0(x)$ продолжаемо при существовании непрерывной производной $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$. Доказательство М. М. Вайнберга существенно основано на положительной определенности ядра $K(x, y)$ и носит громоздкий характер.

Топологические соображения (например, использование принципа неподвижной точки из нашей заметки [11]) позволяют значительно проще установить существование единственного продолжения при более общих предположениях:

1) ядро $K(x, y)$ имеет допустимые (в смысле теории линейных уравнений) разрывы;

2) существует непрерывная производная $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u)$ ($x \in G$, u — из некоторого интервала, содержащего значения функции $v_0(x)$);

3) λ_0 не является собственным числом уравнения (6).

При этом $v(\lambda, x) \to v_0(x)$ равномерно по $x \in G$ при $\lambda \to \lambda_0$. Н. Н. Боголюбов заметил, что продолжаемость решения $v_0(x)$ может быть установлена и при помощи принципа сжатых отображений.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
23 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дерей и Шаудер, Усп. матем. наук, в. 13—14 (1947). [2] E. Роте, Comp. Math., 5, 166 (1937). [3] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М. — Л., 1947. [4] E. Роте, Comp. Math., 4, 294 (1936). [5] Биркгоф и Келлог, Trans. Am. Math. Soc., **23** (1922). [6] E. Роте, Am. Journ. Math., 66, № 2 (1944). [7] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук., в. 23 (1948). [8] Гаммерштейн, Acta Math., **54** (1929). [9] Н. Н. Назаров, Тр. Ин-та матем. и мех. АН УзССР, 4, 28 (1948). [10] М. М. Вайнберг, ДАН, **61**, 965 (1948); **63**, 605 (1948). [11] М. А. Красносельский, ДАН, **73**, № 1 (1950).