Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

ДИФРАКЦИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ТОНКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 30 V 1950)

1. Введем координатную систему, изображенную на рис. 1. Тонкую коническую поверхность ограниченных размеров расположим так, чтобы вершина ее совпала с началом координат. Источником сферической электромагнитной волны будем считать точечный электрический диполь. Проводимость рассматриваемой поверхности принимаем конечной. Возбуждающий поле диполь расположим вдоль оси симметрии поверхности на расстоянии r от начала координат. Определим в точке r поле, отраженное от рассматриваемой поверхности. На основании уравнения (17) статьи [1] скалярный потенциал отраженного поля в точке r может быть определен выражением:

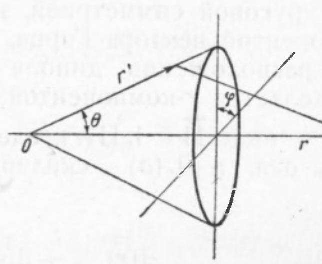

Рис. 1

$$\varphi(r) = \frac{h\varphi A}{4\pi}\int\limits_S \frac{\exp\,[2ik_a\,|\,r-r'\,|\,]}{|\,r-r'\,|^2}\,ds. \tag{1}$$

В принятой нами сферической системе координат

$$\frac{e^{2ik_a|r-r'|}}{|\,r-r'\,|} = \frac{i\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r'}}\,J_{n+1/2}(2k_ar')\,\frac{1}{\sqrt{r}}\,H^{(1)}_{n+1/2}(2k_ar)\,P_n(\cos\gamma), \tag{2}$$

где

$$|\,r-r'\,| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma},$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_n^m(\cos\vartheta)\,P_n^m(\cos\vartheta_0)\cos(\varphi-\varphi_0)\,m, \tag{3}$$

$$ds = r'dr'd\varphi. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\varphi(r) = \frac{h\varphi Ai}{8D}\sum_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}}\,H^{(1)}_{n+1/2}(2kr)\int_0^\Phi P_n(\cos\gamma)\,d\varphi\int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r'}}\,J_{n+1/2}(2k_ar')\,dr'. \tag{5}$$

Раскрывая интеграл в выражении (5), получим:

$$\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta_0) \int_0^{\Phi} \cos m(\varphi-\varphi_0)\, d\varphi \int_0^R r'^{1/2} J_{n+1/2}(2k_a r')\, dr' =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta_0) \frac{1}{m} [\sin m(\Phi-\varphi_0) + \sin m\varphi_0] \frac{1}{\sqrt{(2k_a)^3}} \times$$

$$\times [nRJ_{n+1/2}(2k_aR) S_{-1/2,\, n-1/2}(2k_aR) - RJ_{n-1/2}(2k_aR) S_{1/2,\, n+1/2}(2k_aR)]. \qquad (6)$$

После этого выражение (5) примет вид:

$$\varphi(r) = \frac{h\varphi Ai}{8D\sqrt{(2k_a)^3}} \sum_0^{\infty} [nRJ_{n+1/2}(2k_aR) S_{-1/2,\, n-1/2}(2k_aR) - RJ_{n-1/2}(2k_aR) \times$$

$$\times S_{1/2,\, n+1/2}(2k_aR)] \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(1)}_{n+1/2}(2k_a r) \Psi_n(\cos\vartheta \sin m\varphi), \qquad (7)$$

$$\Psi_n(\cos\vartheta, \sin n\varphi_0) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta_0) \frac{1}{m} [\sin m(\Phi-\varphi_0) + \sin m\varphi_0]. \qquad (8)$$

2. В рассматриваемом случае, когда отражающая поверхность обладает круговой симметрией, электромагнитное поле определяется одной компонентой вектора Герца, параллельной оси возбуждающего диполя. При расположении диполя вдоль оси симметрии поверхности поле определяется r-компонентой вектора Герца, которая может быть написана в виде $\vec{\Pi} = \mathbf{i}_r \Pi(r)$; здесь $\mathbf{i}_r$ — единичный вектор, направленный вдоль оси, а $\Pi_r(a)$ — скалярная функция, определяемая из уравнения:

$$\varphi(r) = -\operatorname{div} \vec{\Pi} = -\left[\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\Pi_r\right]. \qquad (9)$$

Отсюда

$$\Pi_r = \frac{1}{r^2} \int r^2 \varphi(r)\, dr. \qquad (10)$$

Подставляя (7) в (10), можем написать:

$$\Pi_r = \frac{1}{r^2} \frac{h\varphi Ai}{8D\sqrt{(2k_a)^3}} \sum_{n=0}^{\infty} [nRJ_{n+1/2}(2k_aR) S_{-1/2,\, n-1/2}(2k_aR) - RJ_{n-1/2}(2k_aR) \times$$

$$\times S_{1/2,\, n+1/2}(2k_aR)] \Psi_n(\cos\vartheta, \sin n\varphi) \int \frac{r^2}{\sqrt{r}} H^{(1)}_{n+1/2}(2k_a r)\, dr. \qquad (11)$$

Обозначая постоянную величину, стоящую в квадратных скобках в выражении (11), через $B_n(2k_aR)$ и производя интегрирование, получим

$$\Pi_r = \frac{1}{r^2} \frac{h\varphi Ai}{8D(2k_a)^4} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(2k_aR) \Psi_n(\cos\vartheta, \sin n\varphi_0) \times$$

$$\times [(n+1) rH^{(1)}_{n+1/2}(2k_a r) S_{1/2,\, n-1/2}(2k_a r) - rH^{(1)}_{n-1/2}(2k_a r) S_{3/2,\, n+1/2}(2k_a r)]. \qquad (12)$$

3. Компоненты векторов электрического и магнитного полей в рассматриваемом случае, когда возбуждающий поле электрический диполь

расположен вдоль оси симметрии конической поверхности, определяются выражениями:

$$H_r = -i\frac{\omega\varepsilon'}{c\varepsilon}\operatorname{rot}_r\vec{\Pi} = 0,$$
$$H_\vartheta = -i\frac{\omega\varepsilon'}{c\varepsilon}\operatorname{rot}_\vartheta\vec{\Pi} = -i\frac{\omega\varepsilon'}{c\varepsilon}\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Pi_r, \tag{13}$$
$$H_\varphi = -i\frac{\omega\varepsilon'}{c\varepsilon}\operatorname{rot}_\varphi\vec{\Pi} = i\frac{\omega\varepsilon'}{c\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Pi_r,$$

$$E_r = \frac{c}{i\varepsilon'\omega r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}H_\vartheta - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta H_\varphi)\right],$$
$$E_\vartheta = -\frac{c}{i\varepsilon'\omega r\sin\vartheta}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}H_r\right], \tag{14}$$
$$E_\varphi = -\frac{c}{i\varepsilon'\omega r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}H_r\right].$$

Подставляя в уравнения (13) вместо Π_r его значение и производя дифференцирование, получим:

$$H_r = 0, \tag{15}$$

$$H_\vartheta = \frac{h\varphi A\omega\varepsilon'}{8D(2k_a)^4 c\varepsilon r^3}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(2k_aR)\left[(n-{}^1/_2)\,rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_ar)\times\right.$$
$$\left.\times S_{{}^1/_2,\ n-{}^1/_2}(2k_ar) - rH^{(1)}_{n-{}^1/_2}(2k_ar)\,S_{{}^3/_2,\ n-{}^1/_2}(2k_ar)\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_n(\cos\vartheta, \sin n\varphi_0); \tag{16}$$

$$H_\varphi = -\frac{h\varphi A\omega\varepsilon'}{8D(2k_a)^4 c\varepsilon r^3}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(2k_aR)\left[(n-{}^1/_2)\,rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_ar)\times\right.$$
$$\left.\times S_{{}^1/_2,\ n-{}^1/_2}(2k_ar) - rH^{(1)}_{n-{}^1/_2}S_{{}^3/_2,\ n+{}^1/_2}(2k_ar)\right]\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Psi_n(\cos\vartheta,\ \sin n\varphi_0), \tag{17}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_n = \sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta_0)\frac{1}{m}[\sin m(\Phi-\varphi_0)+\sin m\varphi_0]\frac{\partial}{\partial\vartheta}P_n^m(\cos\vartheta); \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Psi_n = \sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta_0)\,P_n^m(\cos\vartheta)[\cos m(\Phi-\varphi_0)+\cos m\varphi_0]; \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}P_n^m(\cos\vartheta) = P_n^{m+1}(\cos\vartheta) + \frac{m\cos\vartheta}{\sin\vartheta}P_n^m(\cos\vartheta). \tag{20}$$

Компоненты вектора электрического поля найдем, подставляя (15)—(17) в (14):

$$E_r = \frac{h\varphi A}{i8D\varepsilon r^4(2k_a)^4}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(2k_aR)\left[(n-{}^1/_2)\,rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_ar)\times\right.$$
$$\left.\times S_{{}^1/_2,\ n-{}^1/_2}(2k_ar) - rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_ar)\,S_{{}^3/_2,\ n+{}^1/_2}(2k_ar)\right]\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Psi_n + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Psi_n + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_n\right\}; \tag{21}$$

$$E_\vartheta = \frac{h\varphi A}{i8D\varepsilon r^3 (2k_a)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r} B_n(2k_a R) \frac{\partial}{\partial\vartheta} \Psi_n \Big\{ [(n-{}^1/_2)\, rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_a r) \times$$
$$\times S_{{}^1/_2,\, n-{}^1/_2}(2k_a r) - rH^{(1)}_{n-{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^3/_2,\, n+{}^1/_2}(2k_a r)] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial r} [(n-{}^1/_2)\, rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^1/_2,\, n-{}^1/_2}(2k_a r) -$$
$$- rH^{(1)}_{n-{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^3/_2,\, n+{}^1/_2}(2k_a r)] \Big\}; \tag{22}$$

$$E_\varphi = \frac{h\varphi A}{i8D\varepsilon (2k_a)^4 r^3} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(2k_a R) \frac{\partial}{\partial\varphi} \Psi_n \Big\{ [(n-{}^1/_2)\, H^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_a r) \times$$
$$\times S_{{}^1/_2,\, n-{}^1/_2}(2k_a r) - H^{(1)}_{n-{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^3/_2,\, n+{}^1/_2}(2k_a r)] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial r} [(n-{}^1/_2)\, rH^{(1)}_{n+{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^1/_2,\, n-{}^1/_2}(2k_a r) -$$
$$- rH^{(1)}_{n-{}^1/_2}(2k_a r)\, S_{{}^3/_2+{}^1/_2}(2k_a r)] \Big\}. \tag{23}$$

Заменяя в формуле (20) присоединенную функцию Лежандра первого рода $P_n^m(\cos\vartheta)$ ее развернутым выражением:

$$P_n^m(\cos\vartheta) = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!} (-1)^m \sin^m\vartheta \Big\{ 1 - \frac{(n-m)(n+m+1)}{(m+1)} \sin^2\frac{\vartheta}{2} +$$
$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1\cdot 2\cdot (m+1)(m+2)} \sin^4\frac{\vartheta}{4} \cdots \Big\}, \tag{24}$$

а затем обращая ϑ и φ в нуль, получим:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} \Psi_n = \sum_{m=0}^{n} - \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta_0)\, \frac{1}{m} \sin m\Phi \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}; \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \Psi_n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta_0)\, \frac{1}{m} (\cos m\Phi - 1); \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \Psi_n = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta_0)\, \frac{1}{m} \sin m\Phi \left[\frac{(n+2)!}{4(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} \right]. \tag{27}$$

Выражениями (15) — (17), (21) — (23) и (25), (26) компоненты электрического и магнитного полей рассматриваемой задачи полностью определяются.

Полученные выражения позволяют исследовать отраженное поле на оси симметрии конических поверхностей различных размеров во всем диапазоне возможных углов ϑ_0 $180° \geqslant \vartheta_0 \geqslant 0$. Задача определения электромагнитного поля на оси круглого диска является одним из частных случаев рассмотренной и соответствует значению $\vartheta_0 = \pi/2$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность акад. Б. А. Введенскому и чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонову за систематическую помощь в работе.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
26 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Г. Мириманов, ДАН, 66, № 4 (1949).