Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Б. В. БУЛГАКОВ

ДИСКРИМИНАНТНАЯ КРИВАЯ И ОБЛАСТЬ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим алгебраическое уравнение n-й степени

$$\Delta(z) = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого вещественны и линейно зависят от двух параметров μ, ν, так что

$$\Delta(z) \equiv P(z)\mu + Q(z)\nu + R(z). \tag{2}$$

Каждой точке плоскости $\mu\nu$ соответствуют определенные значения коэффициентов и, следовательно, определенные значения n корней; обратно, каждой точке плоскости комплексной переменной z соответствует единственная точка (μ, ν). Требуется выделить область плоскости $\mu\nu$, в которой все корни вещественны, и ту ее часть, где они отрицательны. Последнюю будем называть областью апериодической устойчивости, так как если (1) есть характеристическое уравнение линейной колебательной системы с постоянными коэффициентами, то в указанной области все парциальные колебания затухают по показательному закону. Поставленную задачу нужно решать во многих вопросах синтеза регуляторов.

Пары комплексных корней могут появляться или исчезать при перемещении изображающей точки в плоскости $\mu\nu$ только при условии предварительного обращения в двойной действительный корень $z = \varepsilon$ [1]. Это может случиться лишь в точках (μ, ν), где уравнение (1) и уравнение

$$\Delta'(z) = 0 \tag{3}$$

имеют общий корень $z = \varepsilon$, так что

$$\begin{aligned} P(\varepsilon)\mu + Q(\varepsilon)\nu + R(\varepsilon) &= 0, \\ P'(\varepsilon)\mu + Q'(\varepsilon)\nu + R'(\varepsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Условием этого является, в свою очередь, обращение в нуль результанта этих уравнений, т. е. дискриминанта уравнения (1). Обозначая

$$\Gamma_\mu(\varepsilon) = \begin{vmatrix} Q(\varepsilon) & R(\varepsilon) \\ Q'(\varepsilon) & R'(\varepsilon) \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\nu(\varepsilon) = \begin{vmatrix} R(\varepsilon) & P(\varepsilon) \\ R'(\varepsilon) & P'(\varepsilon) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \begin{vmatrix} P(\varepsilon) & Q(\varepsilon) \\ P'(\varepsilon) & Q'(\varepsilon) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

получим параметрические уравнения дискриминантной кривой Y:

$$\mu = \frac{\Gamma_\mu(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}, \quad \nu = \frac{\Gamma_\nu(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}, \tag{7}$$

в которых ε должен пробегать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Кривая Y разбивает плоскость $\mu\nu$ на такие области $E(j)$, что во всех точках $E(j)$ полином $\Delta(z)$ имеет j пар комплексных корней. Целое число j может иметь все значения от 0 до $[n/2]$, т. е. наибольшего целого числа, заключающегося в $n/2$. В частности, $E(0)$ есть область, где все корни вещественны. Кроме точек, получающихся из (7) при действительных значениях ε, дискриминантная кривая может содержать конечное число изолированных точек, соответствующих кратным комплексным корням, но такие точки не входят в состав границ областей $E(j)$ и потому не будут рассматриваться.

Для того чтобы правильно наименовать области $E(j)$, т. е. указать, сколько пар комплексных корней имеет полином $\Delta(z)$ в точках каждой из них, нужно, во-первых, каким-нибудь путем, например численным разрешением уравнения, установить характер корней в какой-либо одной точке плоскости $\mu\nu$ и, во-вторых, установить такое правило штриховки кривой Y, которое позволяло бы утверждать, что при переходе с нештрихованной стороны на штрихованную два комплексных сопряженных корня обращаются в действительные. Если окажется, что число областей, образуемых кривой Y, — наибольшее возможное, т. е. $[n/2]+1$, то правило штриховки достаточно для наименования областей и фактическое определение корней, даже и для одной точки, излишне.

Задача, сформулированная таким образом, аналогична той, которую поставили и решили А. А. Андронов и А. Г. Майер ([2]) и Ю. И. Неймарк ([3]) в отношении числа корней с положительной и отрицательной действительными частями. Установленные в их работах правила позволяют найти область устойчивости.

Общая часть области $E(0)$ и области устойчивости есть область апериодической устойчивости.

Правило штриховки состоит в следующем: *при* $\Gamma(\varepsilon) > 0$ *следует штриховать ту сторону кривой Y, которая лежит по левую руку от наблюдателя, странствующего по кривой в направлении убывания* ε; *при* $\Gamma(\varepsilon) < 0$ *штрихуется правая сторона. При переходе с нештрихованной стороны на штрихованную теряется одна пара комплексных корней.*

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
21 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Мейман, Усп. матем. наук, 4, 6 (34), 154 (1949). [2] А. А. Андронов и А. Г. Майер, Автоматика и телемеханика, **7**, № 2—3, 95 (1946). [3] Ю. И. Неймарк, там же, **9**, № 3, 190 (1948).