Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

*МАТЕМАТИКА*

Н. Г. ЧУДАКОВ и К. А. РОДОССКИЙ

# ОБ ОБОБЩЕННОМ ХАРАКТЕРЕ

*(Представлено академиком И. М. Виноградовым 24 VI 1950)*

Эта заметка посвящена специальному классу вполне мультипликативных функций $h(n)$, подчиненных дополнительным требованиям: $1^\circ\ |h(n)| = 0$; $2^\circ\ S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} h(n)$ ограничено для всех $x \geqslant 0$.

Такие функции являются естественным обобщением неглавных характеров Дирихле ([1]). Ниже будет показано, что некоторые свойства функций $\chi(n)$ обобщаются и на функции $h(n)$.

Прежде всего заметим, что $h(n)$ определено своими значениями для тех простых $p$, для которых $h(p) \neq 0$. Совокупность таких простых мы называем базой $h(n)$. Эта база может состоять только из одного элемента, как показывает пример: пусть $p_0$ — любое простое; $h(p_0) \neq 0$, 1 и $h(p) = 0$ для всякого другого простого $p \neq p_0$, $h(1) = 1$.

Однако, как это будет показано в другой заметке, не существует функции $h(n)$, база которой состояла бы из конечного числа $N$ элементов для $N \geqslant 2$. Нам пока неизвестны примеры $h(n)$ с бесконечной базой, кроме характеров Дирихле.

По аналогии с функциями $\chi(n)$, для функций $h(n)$ можно установить понятие первообразного и производного характеров. Прежде всего заметим, что если характер $h(n)$ умножается на главный характер Дирихле, т. е. на функцию $\chi_0(n)$, то произведение $f(n) = \chi_0(n)\,h(n)$ будет также характером; в самом деле, для доказательства достаточно рассмотреть тот случай, когда $\chi_0(n)$ обращается в нуль только для одного простого числа $p_0$; но тогда

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{n \leqslant x} h(n) - h(p_0) \sum_{n \leqslant x p_0^{-1}} h(n) \ll \sup_{0 \leqslant x < \infty} \Big| \sum_{n \leqslant x} h(n) \Big|.$$

Характер $h(n)$ мы будем называть производным, если $h(n) = \chi_0(n)\,h'(n)$, причем $h'(n)$ также характер, но база его шире базы $h(n)$. Если же для данного $h(n)$ не существует такого представления, то $h(n)$ называется первообразным характером.

Среди характеров $h(n)$ особое место занимают те, база которых состоит из почти всех простых, т. е. за исключением, может быть, конечного числа таковых. Было высказано (А. К. Павлючук) предположение, что этот класс функций совпадает целиком с совокупностью неглавных характеров Дирихле.

В подтверждение возможной справедливости такой гипотезы можно привести следующие факты. А. И. Климов показал, что если характер $h(n)$ и характер Дирихле $\chi(n)$ совпадают друг с другом для всех простых $p$, кроме, может быть, одного, то они совпадают всюду, т. е.

$h(n) \equiv \chi(n)$. Отсюда следует, между прочим, что действительный первообразный характер Дирихле является первообразным и во всем множестве функций $h(n)$.

Далее было показано, что $h(n) = \left(\frac{n}{p_0}\right)$, т. е. символу Лежандра, если $|S(x)| \leqslant 1$ и $h(n)$, принимая только действительные значения, обращается в нуль только для одного простого $p_0$ (Полосуев).

Для обобщенных характеров $h(n)$ можно определить функцию

$$L(s, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

которая правильна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Эту функцию мы будем называть обобщенной $L$-функцией.

Многие теоремы обыкновенных $L$-функций могут быть перенесены и на обобщенные $L$-функции. Из них отметили только две.

Пусть $h(n)$ — действительный обобщенный характер; тогда существует такое натуральное $M$, которое определяется равенством:

$$M = \max_{1 \leqslant x < \infty} |S(x)|.$$

Теорема 1.

$$L(1, h) > (14M)^{-1} \text{ для } M \geqslant 2.$$

Доказательство. Полагаем

$$S_\alpha = m^{2-\alpha} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^\alpha h(\nu) \sum_{k=1}^{m/\nu} k^\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2), \quad m = 11^2 M^2.$$

Легко видеть, что, с одной стороны:

$$S_0 - 2S_1 + S_2 = \sum_{n=1}^{m} (m-n)^2 \sum_{d/n} h(d) \geqslant \sum_{n^2 \leqslant m} (m - n^2)^2 > \frac{1}{2} m^{5/2}. \quad (1)$$

С другой стороны, полагая $\frac{m}{\nu} = \left[\frac{m}{\nu}\right] + \vartheta_\nu$, мы непосредственно получаем:

$$S_0 - 2S_1 + S_2 \leqslant \frac{m^3}{3} L(1, h) + \frac{5Mm^2}{3} - \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{m} h(\nu)\nu^2 \Phi(\vartheta_\nu), \quad (2)$$

где $\Phi(\vartheta) = \vartheta(\vartheta - 1)(\vartheta - {}^1/_2)$.

Наконец, частичное суммирование дает оценку:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m} h(\nu)\nu^2 \Phi(\vartheta_\nu) \right| \leqslant \frac{11Mm^2}{4}. \quad (3)$$

(1), (2) и (3) доказывают нашу теорему.

Так как для действительных характеров mod $k$ мы имеем $S(x) < \sqrt{k} \lg k$, то из нашей теоремы следует, что $L(1, \chi) > (28\sqrt{k} \lg k)^{-1}$, т. е. результат, близкий к известной оценке снизу $L(1, \chi)$, найденной Педжом.

Теорема 2. *Пусть $h(n)$, $h_1(n)$ и $h(n)h_1(n)$ — действительные обобщенные характеры; числа $M$, $M_1$ и $M_2$ имеют соответственно для функций $h$, $h_1$, и $hh_1$ тот же смысл, как и число $M$ в теореме* 1;

$\Phi(s)=\zeta(s)L(s,h)L(s,h_1)L(s,hh_1)$; $\gamma=L(1,h)L(1,h_1)L(1,hh_1)$; *действительное* $a$ *таково, что* $0<a<1$ *и* $b=\frac{2}{3}(2-a)<1$.

*Тогда*

$$\Phi(s)\geqslant\frac{1}{2}-c_1M_3^{c\,(1-s)}\gamma(1-s)^{-1},$$

*где* $a<s<1$, $c=(-\lg b)^{-1}$, $c_1$ — *постоянная, зависящая только от выбора числа* $a$.

Доказательство этой теоремы в основных чертах следует методу Эстермана [2]. Так как $\Phi(s)-\frac{\gamma}{s-1}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\beta_m-\gamma)(s-2)^m$ правильна в круге $|s-2|\leqslant{}^3/_2$, то

$$\sum_{m=m_0}^{\infty}(\beta_m-\gamma)(s-2)^m\leqslant\frac{1}{2}\text{ при } m_0=\left[\lg\frac{2c_1MM_1M_2}{1-b}\left(\lg\frac{1}{b}\right)^{-1}\right]+1,$$

откуда мы получим искомое неравенство, если заметим, что $\beta_m\geqslant0$ для любого $m$ и $\Phi(2)\geqslant1$.

Теорема Зигеля [3] для обычных $L$-функций является следствием теоремы 2, если положить $h(n)=\chi(n)$ и $h_1(n)=\chi_1(n)$, причем выбор точки $s$ и функции $\chi_1(n)$ осуществляется следующим образом: если все $L(s,\chi)\neq0$ внутри $\left(1-\frac{\varepsilon}{4c},\ 1\right)$, то $\chi_1(n)=\chi(n,4)$, $s=1-\frac{\varepsilon}{8c}$; в противном случае в качестве $\chi_1$, берется характер наименьшего модуля, который имеет нуль в указанном интервале, а $s$ равно этому нулю. В силу такого выбора $\Phi(s)\leqslant0$, что, после элементарных расчетов, доказывает теорему Зигеля.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
3 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чудаков, Введение в теорию $L$-функций Дирихле, 1947. [2] T. Estermann, Journ. London Math. Soc., **23**, № 92, 275 (1948). [3] C. L. Siegel, Acta Arithmetica, **1**, 83 (1936).