Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VI 1950)

Мы рассматриваем ниже систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)\, x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$Px(0) + Qx(T) = 0 \tag{2}$$

(P и Q — заданные матрицы) и указываем для этой краевой задачи метод вычисления собственных чисел, эффективный в области больших значений параметра λ.

Мы предполагаем ниже, что $(m+1)$-я производная каждого из элементов матрицы $A(t)$ суммируема в интервале $(0, T)$ $(m \geqslant 1)$, и ограничиваемся для простоты рассмотрением того случая, когда матрица $A(t)$ во всем интервале $(0, T)$ не имеет кратных собственных чисел.

Замена переменных $x = B(t)\, y$ преобразует систему (1) к виду

$$\frac{dy}{dt} = \lambda W(t)\, y,$$

когда матрица $W(t)$ определяется соотношением:

$$B(t)\, W(t) = A(t)\, B(t) - \frac{1}{\lambda} B'(t). \tag{3}$$

Если бы удалось построить неособенную матрицу $B(t)$, которой, согласно (3), соответствовала бы диагональная матрица $W(t)$, систему (1) можно было бы проинтегрировать в квадратурах. Во всяком случае, полагая в (3)

$$B(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^{-k} B_k(t), \qquad W(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^{-k} W_k(t),$$

где $W_0(t), \ldots, W_m(t)$ — последовательность диагональных матриц, можно построить матрицы $B_k(t)$ и $W_k(t)$ с таким расчетом, чтобы разность между матрицами, стоящими в левой и в правой частях соотношения (3), имела порядок λ^{-m-1}. Мы придем в этом случае к уравнениям:

$$B_0(t)\, W_0(t) - A(t)\, B_0(t) = 0, \tag{4}$$

$$B_k(t)\,W_0(t) - A(t)\,B_k(t) = -\sum_{j=0}^{k-1} B_j(t)\,W_{k-j}(t) - B'_{k-1}(t), \quad k=1,\ \ldots,\ m. \tag{5}$$

Для того чтобы уравнение (4) для матрицы B_0 имело при данном t нетривиальное решение, диагональная матрица W_0 должна быть составлена из собственных чисел матрицы A. В этом случае мы удовлетворим уравнению (4), расположив в столбцах матрицы B_0 составляющие собственных векторов матрицы A. Мы предполагаем, что построенная таким образом матрица B_0 неособенная во всем интервале $0 \leqslant t \leqslant T$. Для того чтобы уравнения (5) для матрицы B_k было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы элементы диагональной матрицы W_k были равны соответствующим диагональным элементам матрицы

$$C_k(t) = -B_0^{-1}(t)\left[B'_{k-1}(t) + \sum_{j=1}^{k-1} B_j(t)\,W_{k-j}(t)\right]. \tag{6}$$

В этом случае мы удовлетворим уравнениям (5), полагая:

$$B_k = -B_0 \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{c_{12k}}{w_{10}-w_{20}} & \dfrac{c_{13k}}{w_{10}-w_{30}} & \ldots \\ \dfrac{c_{21k}}{w_{20}-w_{10}} & 0 & \dfrac{c_{23k}}{w_{20}-w_{30}} & \ldots \\ \dfrac{c_{31k}}{w_{30}-w_{10}} & \dfrac{c_{32k}}{w_{30}-w_{20}} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где через c_{ijk} обозначены элементы матрицы C_k, через w_{i0} — элементы диагональной матрицы W_0.

Приравнивая нулю определитель матрицы $B(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda^{-k} B_k(t)$, мы получим для λ алгебраическое уравнение. Обозначим через λ_0 наибольшее из значений, принимаемых в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ корнями этого алгебраического уравнения, попадающими на правую вещественную полуось (если такие корни отсутствуют, будем считать, что $\lambda_0 = 0$). При $\lambda > \lambda_0$ матрица $B(t)$ будет неособенной во всем интервале $(0, T)$.

Осуществляя в системе (1) замену переменных $x = \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda^{-k} B_k(t)\,y$, получим систему уравнений:

$$\frac{dy}{dt} - \lambda\,W(t)\,y = \lambda^{-m} C(t)\,y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где

$$W(t) = \sum_{k=0}^{m} \lambda^{-k}\,W_k(t),$$

$$C(t) = -B^{-1}(t)\left[B'_m(t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda^{1-k} \sum_{j=0}^{m-k} B_{m-j}(t)\,W_{j+k}(t)\right]. \tag{9}$$

Итак, при сделанных нами относительно матрицы $A(t)$ предположениях система (1) может быть преобразована к виду (8), где $W(t)$ — диагональная матрица, а $C(t)$ — матрица с элементами, суммируемыми в интервале $(0, T)$ при $\lambda > \lambda_0$. Осуществляя это преобразование, мы использовали известную идею „асимптотического“ интегрирования дифференциальных уравнений ([1]).

Интегрируя уравнения (8) так, как если бы правые части этих уравнений были нам известны, мы получим интегральное уравнение для искомого вектора $y(t)$:

$$y(t) = S_0(t)\,y(0) + \varepsilon \int_0^t S_0(t)\,S_0^{-1}(\tau)\,C(\tau)\,y(\tau)\,d\tau, \quad \varepsilon = \lambda^{-m}, \tag{10}$$

где $S_0(t)$ — диагональная матрица, определяемая дифференциальным уравнением:

$$S_0'(t) = \lambda\,W(t)\,S_0(t), \quad S_0(0) = I. \tag{11}$$

Решая интегральное уравнение (10) методом последовательных приближений, получим для вектора $y(t)$ ряд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k(t)\,y(0), \tag{12}$$

где матрицы $S_1(t)$, $s_2(t)$, ... последовательно определяются из соотношения:

$$S_k(t) = \int_0^t S_0(t)\,S_0^{-1}(\tau)\,C(\tau)\,S_{k-1}(\tau)\,d\tau, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{13}$$

Ряд (12) сходится при $0 \leqslant t \leqslant T$, $\lambda > \lambda_0$.

Для того чтобы удовлетворялись краевые условия (2), вектор $y(0)$ должен удовлетворять уравнению

$$\left[PB(0) + QB(T)\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k(T)\right] y(0) = 0. \tag{14}$$

Представляя определитель системы (14) в форме ряда, расположенного по степеням ε, и заменяя затем ε на λ^{-m}, мы получим уравнение для определения собственных чисел краевой задачи в форме:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-mk} F_k(\lambda) = 0, \tag{15}$$

где, в частности, $F_0(\lambda)$ — определитель матрицы $PB(0) + QB(T)\,S_0(T)$. Ряд, фигурирующий в уравнении (15), сходится при $\lambda_0 < \lambda < \infty$. В частности, если все собственные числа матрицы $A(t)$ при любом t из интервала $(0, T)$ не выходят за пределы левой полуплоскости, уравнение (15) позволяет детально исследовать асимптотические свойства распределения собственных чисел краевой задачи. Решение уравнения (15) в указанном случае легко осуществляется в области больших значений λ методом последовательных приближений, если в качестве первого приближения принять для собственных чисел нули функции $F_0(\lambda)$. Решение уравнения первого приближения $F_0(\lambda) = 0$ осуществляется сравнительно просто, так как это уравнение содержит лишь элементарные трансцендентные функции λ.

Поступило
6 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.