Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

С. П. ПУЛЬКИН

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИТЕРАЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 VI 1950)

Пусть $f(x)$ — функция вещественной переменной, определенная на всей действительной оси. Будем рассматривать итерации функции $f(x)$. Обозначим, как обычно, $x_n = f(x_{n-1})$, x_0 — произвольная начальная точка. Будем говорить, что итерационная последовательность $\{x_n\}$ порождается точкой x_0. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке ξ, $\lim x_n = \xi$, то $f(\xi) = \xi$, т. е. ξ есть корень уравнения $f(x) = x$ или двойная точка функции $f(x)$. Если $x_{n+p} = x_n$, $x_{n+k} \neq x_n$ при $k < p$, то точки x_n, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}$ образуют цикл порядка p. При $p = 1$ цикл вырождается в двойную точку. Если последовательность имеет цикл, то все члены последовательности, начиная с некоторого, совпадают с точками цикла.

Многочисленные работы посвящены исследованию условий сходимости последовательности итераций. В ряде работ Фату и Жюлия изучены итерации рациональных и целых функций в комплексной области „в целом", т. е. проведено исследование не только условий сходимости, но изучены все возможные типы итерационных последовательностей, которые могут представиться. Если будем осуществлять процесс итерации, отправляясь от любой точки множества E, получим последовательность функций $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $f_0(x) = f(x)$, определенных на E.

В работе (1) мною сделана попытка исследовать итерации функций вещественного переменного также „в целом".

Будем рассматривать функции вещественного переменного, удовлетворяющие следующим условиям: 1) функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и имеет кусочно-непрерывные производные первого и второго порядка; 2) функция $f(x)$ имеет конечное число максимумов и минимумов; 3) кривая $y = f(x)$ имеет конечное число точек перегиба.

Как известно, двойные точки и циклы могут быть трех типов: притягивающие, отталкивающие и индифферентные. Будем называть окрестностью цикла совокупность попарно непересекающихся окрестностей точек этого цикла. Притягивающий цикл имеет такую окрестность, что любая точка этой окрестности порождает итерационную последовательность, периодически и монотонно сходящуюся к циклу. Отталкивающий цикл имеет такую окрестность, что любая ее точка порождает итерационную последовательность, выходящую за пределы этой окрестности через конечное число шагов.

Будем в дальнейшем понимать под „окрестностью" точки ξ цикла одностороннюю ее окрестность — полуоткрытый интервал B_ξ, концом которого является $\xi \in B_\xi$. Замыкание какой-нибудь окрестности точки ξ будем называть замкнутой окрестностью точки ξ.

Каждую точку ξ цикла будем рассматривать в совокупности с ее произвольной односторонней окрестностью какой-нибудь одной стороны (правой или левой) и будем называть ориентированной точкой (соответственно, правой или левой ориентации), определяемой точкой ξ. Таким образом, одна и та же точка может определять две различные ориентированные точки. Окрестностью ориентированной точки ξ', определяемой точкой ξ, будем называть любую одностороннюю окрестность точки ξ соответствующей ориентации (или правую, или левую, в соответствии с ориентацией точки ξ'). Ориентированную точку ξ' будем называть предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если любая окрестность точки ξ' содержит бесконечное множество членов этой последовательности.

Будем называть *предельной точкой первого класса* изолированную предельную точку множества членов итерационной последовательности. Будем называть *предельной точкой p-го класса* предельную точку множества предельных точек любого класса $p' < p$. Итерационную последовательность мы называем *последовательностью p-го класса*, если число ее предельных точек p-го класса конечно.

Будем говорить, что итерационная последовательность *осциллирует* относительно системы отталкивающих циклов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, если все точки этих циклов и только они суть предельные точки высшего класса данной последовательности. Итерационную последовательность будем называть *осцилляционной*, если существует система отталкивающих циклов, относительно которой она осциллирует.

В настоящей работе я устанавливаю некоторый достаточный признак осцилляционности и существование итерационных последовательностей высших классов.

Рассмотрим для простоты совокупность двух циклов второго порядка: $C_1(\xi_1, \xi_2)$ и $C_2(\eta_1, \eta_2)$,

$$\xi_2 = f(\xi_1), \quad \eta_2 = f(\eta_1); \qquad \xi_1 = f(\xi_2), \quad \eta_1 = f(\eta_2).$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ_1 справа. Рассмотрим правостороннюю окрестность $\Delta_1^{(1)} = [\xi_1, \xi_1 + h_1)$ точки ξ_1, выбрав h_1 столь малым, чтобы функция $f(x)$ в этой окрестности была монотонна и непрерывна. Тогда первая итерация этой окрестности $f(\Delta_1^{(1)})$ будет односторонней окрестностью точки ξ_2. Пусть это будет $\Delta_2^{(1)} = (\xi_2 - h_2, \xi_2]$, $h_2 > 0$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ_2 со стороны окрестности $\Delta_2^{(1)}$. Тогда можно считать h_1 выбранным так, что в окрестности $\Delta_2^{(1)}$ функция $f(x)$ также монотонна и непрерывна. $f(\Delta_2^{(1)})$ будет окрестностью точки ξ_1. Положим для определенности, что $f(\Delta_2^{(1)}) = \Delta_3^{(1)}$ будет правосторонней окрестностью $[\xi_1, \xi_1 + h_1')$ точки ξ_1, как и $\Delta_1^{(1)}$. Так как C_1 есть отталкивающий цикл, то h_1 можно выбрать так, что $h_1' > h_1$, и что, если $x_0 \in \Delta_1^{(1)}$, то вторая итерация точки x_0 будет вне $[\xi_1, x_0]$. Полуоткрытый интервал $\Delta_0^{(1)} = \Delta_3^{(1)} - \Delta_1^{(1)}$ будем называть *несобственной* частью окрестности $\Delta_3^{(1)}$. Пусть при известном выборе h_1 оказывается, что $f(x)$ монотонна и непрерывна в $\Delta_0^{(1)}$ и $f(\Delta_0^{(1)})$ есть односторонняя окрестность точки η_1, обозначим ее $\Delta_1^{(2)}$. В отношении цикла (η_1, η_2) и $\Delta_1^{(2)}$ повторим рассуждение, проведенное в отношении цикла (ξ_1, ξ_2) и $\Delta_1^{(1)}$. Пусть окажется опять, что $f(\Delta_1^{(2)}) = \Delta_2^{(2)}$, $f(\Delta_2^{(2)}) = \Delta_3^{(2)} \supset \Delta_1^{(2)}$ и $f(x)$ монотонна и непрерывна в каждой окрестности $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}$ и в $\Delta_0^{(2)} = \Delta_3^{(2)} - \Delta_1^{(2)}$. Наконец, предположим, что $f(\Delta_0^{(2)}) = \Delta_1^{(1)}$.

Мы получили систему окрестностей точек цикла $\Delta_i^{(k)}$ $(i, k=1, 2)$ и еще систему промежутков $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}$, которые в совокупности образуют множество F_Δ, обладающее следующими свойствами: 1) какова бы ни была точка $x_0 \in F_\Delta$, все ее последующие принадлежат F_Δ; при этом члены итерационной последовательности обходят все окрестности $\Delta_i^{(k)}$ в определенном порядке чередования; 2) для любой точки $x_0 \in F_\Delta$ можно подобрать последовательность предыдущих, также принадлежащую F_Δ. Можно выбрать эту последовательность так, что она будет периодически монотонно сходиться к одному из циклов. Множество F_Δ будем называть вполне инвариантным по отношению к данной системе циклов и данной системе их окрестностей.

Теорема. *Пусть дана система отталкивающих циклов* (ξ_1, ξ_2) *и* (η_1, η_2) *и некоторая система окрестностей, для которой существует вполне инвариантное множество* F_Δ. *Множество* F_Δ *содержит континуум точек, порождающих итерационные последовательности, осциллирующие относительно данной системы циклов. Каждая окрестность* $\Delta_i^{(k)}$ *представляется в виде суммы*

$$\Delta_i^{(k)} = E_\infty + E_0 + \sum_{2}^{\infty} E_k,$$

где E_0 — *совокупность точек, порождающих конечные циклы,* E_k — *множество точек, порождающих итерационные последовательности класса* k; E_∞ — *совокупность точек, порождающих последовательности бесконечного класса. Множество* E_0 *счетно, множества* E_∞ *и* E_k *при любом* $k > 1$ *имеют мощность континуума. Любой интервал, принадлежащий* $\Delta_i^{(k)}$, *содержит точки каждого из множеств* E_∞, E_0, E_k $(k > 1)$.

Идея доказательства такова. Рассмотрим, например, окрестность $\Delta_1^{(1)}$. Осуществим отображение отрезка $\Delta_1^{(1)}$ в себя посредством итераций обратной функции $f^{-1}(x)$ так, чтобы последовательные итерации не выходили за пределы множества F_Δ. Всевозможные отображения такого рода образуют систему „канонических" интервалов $\delta^{(1)}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$, причем $\Delta_1^{(1)} = \sum\limits_{k_1=1}^{\infty} \delta_{k_1}$, $\delta^{(1)}_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}} = \sum\limits_{k_n=1}^{\infty} \delta^{(1)}_{k_1 k_2 \ldots k_{n-1} k_n}$. Каждую точку x отрезка $\Delta_1^{(1)}$, за исключением концевых точек канонических интервалов, можно характеризовать бесконечной последовательностью натуральных чисел $[k_1, k_2, \ldots]$, что означает, что $x \in \delta^{(1)}_{\ldots k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$; будем называть ее счетномерной дробью. Пусть $x \in \Delta_1^{(1)}$, $x = [k_1, k_2, \ldots]$; оказывается, что члены итерационной последовательности, порождаемой этой точкой и содержащиеся в $\Delta_1^{(1)}$, определяются счетномерными дробями: $[k_{2\nu-1} - i, k_{2\nu}, k_{2\nu+1}, \ldots]$, $i = 1, 2, \ldots, k_{2\nu-1} - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Изучая структуру множества членов последовательности, содержащихся во всех окрестностях точек цикла, порождаемой произвольной точкой $x \in \Delta_1^{(1)}$, при помощи их представлений посредством счетномерных дробей, мы убеждаемся в справедливости теоремы.

Высказанные предложения могут быть распространены на любое конечное число циклов любого порядка.

Пусть $\{C_k\}_{k=1, 2, \ldots, m}$ есть система отталкивающих циклов, $C_k = \{\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_{n_k}^{(k)}\}$. Правильной окрестностью Δ_k цикла C_k будем называть совокупность окрестностей всех точек этого цикла, удовлетворяющих следующим условиям: 1) окрестности $\Delta_{\xi_i}^{(k)}$ точек данного цикла попарно не пересекаются; 2) Δ_k не содержит точек других циклов данной системы и не имеет общих точек с окрестностями других циклов этой системы; 3) функция $f(x)$ монотонна и непрерывна в каждой из окрестностей $\Delta_{\xi_i}^{(k)}$; 4) среди окрестностей $\Delta_{\xi_i}^{(k)}$ существует такая, обозначим ее $\Delta_1^{(k)}$ (пусть она совпадает с $\Delta_{\xi_1}^{(k)}$), что $f(\Delta_{\xi_i}^{(k)}) = \Delta_{\xi_{i+1}}^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_k - 1)$; назовем ее **главной окрестностью** точек цикла C_k; 5) какова бы ни была точка $x_0 \in \Delta_0^{(k)}$, ее n_k-я итерация находится вне отрезка $[\xi_1, x_0]$.

Рассмотрим систему отталкивающих циклов $C = \{C_k\}$ и некоторую систему их правильных окрестностей $\{\Delta_k\}_{k=1,2,\ldots,\ m}$. Множество F_Δ действительных чисел, содержащее $\Delta = \sum\limits_1^m \Delta_k$, будем называть **вполне инвариантным** по отношению к данной системе циклов и данной системе их окрестностей, если: 1) все окрестности Δ_k правильны; 2) какова бы ни была точка $x \in F_\Delta$, последовательность итераций этой точки принадлежит F_Δ и каждая из окрестностей Δ_k содержит точки этой последовательности; 3) какова бы ни была точка $x \in F_\Delta$, последовательность итераций обратной функции (последовательность „предыдущих") может быть выбрана так, что все члены этой последовательности принадлежат F_Δ и хоть один из членов принадлежит заданному Δ_k.

Множество $F_\Delta - \sum\limits_1^m \Delta_k$ будем называть **промежуточным множеством**.

Теорема. *Пусть дана система C отталкивающих циклов и система их окрестностей $\{\Delta_k\}_{k=1,2,\ldots,m}$, для которой существует вполне инвариантное множество F_Δ такое, что замыкание промежуточного множества не содержит ни одного цикла. Множество F_Δ содержит континуум точек, порождающих итерационные последовательности, осциллирующие относительно данной системы циклов. Каждая окрестность $\Delta_{\xi_i}^{(k)}$ представляется в виде суммы*

$$\Delta_{\xi_i}^{(k)} = E_\infty + E_0 + \sum_2^\infty E_k,$$

где E_0 — совокупность точек, порождающих конечные циклы; E_k — множество точек, порождающих итерационные последовательности класса k; E_∞ — совокупность точек, порождающих последовательности бесконечного класса. Множества E_∞ и E_k, $k > 1$, имеют мощность континуума. Множество E_0 счетно. Любой интервал, принадлежащий F_Δ, содержит точки каждого из множеств: E_∞, E_0, E_k $(k > 1)$.

В этой теореме содержится, очевидно, утверждение, что существуют итерационные последовательности любого конечного, а также бесконечного класса.

Можно указать совсем простые функции, для которых справедлива высказанная теорема и, следовательно, имеет место осцилляция. Так, например, функция $y = 4x - x^2$ имеет две двойные точки отталкивания: $x = 0$ и $x = 3$. Отрезок $[0; 4]$ есть вполне инвариантное множество относительно этой системы двойных точек.

Поступило
20 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Пулькин, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 71 (1942).