Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕРВАЛЕ $(0, \infty)$ И ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 VI 1950)

Хорошо известно, что между теорией бесконечных якобиевых матриц (степенной проблемой моментов) и краевой задачей Штурма—Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ имеется очень много аналогий. Эти аналогии, на наш взгляд, далеко не исчерпаны.

В этой заметке будет рассмотрено нагруженное интегральное уравнение, которое при одном выборе функции распределения $\sigma(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ может соответствовать краевой задаче, определяемой оператором Штурма — Лиувилля с индексом дефекта $(1, 1)$, а при другом (когда $\sigma(x)$ есть чистая функция скачков со скачками в целых точках $0, 1, 2, \ldots$) — „краевой задаче", определяемой бесконечной якобиевой матрицей с индексом дефекта $(1, 1)$.

Мы покажем, что теоретико-функциональные методы [1], развитые нами при изучении абстрактных эрмитовых операторов [2], оказываются полезными при изучении одномерных краевых задач классического типа и связанных с ними интегральных уравнений.

1. Пусть $\sigma(x) = \sigma(x-0)$ $(0 \leqslant x < \infty,\ \sigma(\infty) \leqslant \infty)$ — некоторая неубывающая функция, а $L_\sigma^{(2)}$ — пространство всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$, для которых интеграл от $|f(x)|^2 d\sigma(x)$ по всему интервалу $(0, \infty)$ имеет конечное значение.

Мы исследуем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty K(x, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s) \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{1}$$

в котором ядро $K(x, s)$ имеет специальную структуру

$$K(x, s) = \begin{cases} \psi(x)\, \chi(s) & (x \leqslant s), \\ \psi(s)\, \chi(x) & (x \geqslant s), \end{cases} \tag{2}$$

где $\psi(x)$ и $\chi(x)$ — две какие-либо вещественные функции из $L_\sigma^{(2)}$.

Положим

$$V(x, s) = \psi(s)\, \chi(x) - \psi(x)\, \chi(s) \quad (0 \leqslant x,\ s < \infty)$$

и введем в рассмотрение функции $\psi(x; \lambda)$ и $\chi(x; \lambda)$, определяемые из уравнений Вольтерра

$$\psi(x;\ \lambda) = \psi(x) + \lambda \int_0^x V(x,\ s)\,\psi(s;\ \lambda)\,d\sigma(s),$$

$$\chi(x;\ \lambda) = \chi(x) + \lambda \int_0^x V(x,\ s)\,\chi(s;\ \lambda)\,d\sigma(s).$$

Легко показать, что при любом комплексном λ функции $\psi(x;\ \lambda)$ и $\chi(x;\ \lambda)$ принадлежат $L_\sigma^{(2)}$.

С помощью этих функций образуем целые функции от λ:

$$D_0(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^\infty \psi(s;\ \lambda)\,\chi(s)\,d\sigma(s), \quad D_1(\lambda) = -\lambda \int_0^\infty \psi(s;\ \lambda)\,\psi(s)\,d\sigma(s),$$

$$E_0(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \chi(s;\ \lambda)\,\chi(s)\,d\sigma(s), \quad E_1(\lambda) = 1 + \lambda \int_0^\infty \chi(s;\ \lambda)\,\psi(s)\,d\sigma(s).$$

Легко показать (см. [3]), что функция $D_0(\lambda)$ является детерминантом Фредгольма уравнения (1).

Теорема 1. *При любом вещественном α функция*

$$F_\alpha(\lambda) = \frac{\cos\alpha\, E_0(\lambda) + \sin\alpha\, E_1(\lambda)}{\cos\alpha\, D_0(\lambda) + \sin\alpha\, D_1(\lambda)}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ *на свою часть.*

Кроме того, имеет место следующее тождество:

$$E_1(\lambda)\,D_0(\lambda) - E_0(\lambda)\,D_1(\lambda) \equiv 1. \tag{3}$$

В силу теоремы Н. Г. Чеботарева (см. [4], главы IV, V) о мероморфных функциях, отображающих верхнюю полуплоскость на свою часть, можно утверждать, что все нули числителя и знаменателя функции $F_\alpha(\lambda)$ вещественны, просты и перемежаются.

Кроме того, функция $F_\alpha(\lambda)$ допускает абсолютно сходящееся разложение *

$$F_\alpha(\lambda) = C_\alpha + m_\alpha\lambda + \sum_j \left(\frac{\rho_j}{\lambda_{j\alpha} - \lambda} - \frac{\rho_j}{\lambda_{j\alpha}}\right), \tag{4}$$

где $-\infty < C_\alpha < \infty$, $m_\alpha \geqslant 0$, $\rho_j > 0$.

2. Обозначим через (N) класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих двум условиям:

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|f(\lambda)||}{1+\lambda^2}\,d\lambda < \infty.$$

Теорема 2. *Каждая из функций* $D_0(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $E_0(\lambda)$, $E_1(\lambda)$ *принадлежит классу* (N).

* Если $\alpha \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$, то одно из $\lambda_{j\alpha}$ равно нулю и тогда, разумеется, в сумме (4) следует опустить соответствующий член $\rho_j/\lambda_{j\alpha}$. При весьма общих предположениях относительно функций ψ и χ можно показать, что $m_\alpha = 0$. Это, например, всегда имеет место, если уравнение (1) соответствует некоторой краевой задаче Штурма — Лиувилля (см. п. 4).

Приведем доказательство этой теоремы.

В разложении (4) положим $\alpha = \pi/2$, а затем $\alpha = 0$ и из полученного таким образом первого равенства вычтем второе.

Учитывая (3), найдем, что функция $D_0^{-1}(\lambda)\,D_1^{-1}(\lambda)$ разлагается в сумму элементарных дробей с поправочными членами по Коши. На основании теоремы автора (см. [1], теорему 4) можно будет утверждать, что целая функция $D_0(\lambda)\,D_1(\lambda)$ принадлежит классу (N), а отсюда уже нетрудно получить, что и каждая из функций $D_0(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ в отдельности принадлежит классу (N). Рассмотрение функции $F_\alpha^{-1}(\lambda)$ приводит к тому же выводу и для функций $E_0(\lambda)$ и $E_1(\lambda)$.

3. Можно также показать, что имеет место сходящееся разложение

$$\frac{1}{D_0(\lambda)} = c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 \sum \frac{\varkappa_j}{\lambda_j^2(\lambda_j - \lambda)}, \tag{5}$$

где $\lambda_j = \lambda_{j0}$ суть нули детерминанта Фредгольма.

Теорема 3. *Если для интегрального уравнения* (1) *выполняется условие:*

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty, \tag{6}$$

то детерминант $D_0(\lambda^2)$ принадлежит классу (N) и, следовательно, (см. [1]*) существует конечный предел*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = l.$$

Для получения этой теоремы следует на основании (5) разложить $D_0^{-1}(z^2)$ в сумму элементарных дробей и затем воспользоваться теоремой 5 нашей статьи ([1]). Кстати, заметим, что приведенное в ([1]) доказательство теоремы 5 ошибочно, но основная идея доказательства правильна, и оно легко исправимо *.

4. Рассмотрим уравнение

$$\varphi'' + q(x)\varphi + \lambda\rho(x)\varphi = 0, \tag{7}$$

где $\rho(x) \geqslant 0$ и $q(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ — вещественные функции, измеримые и интегрируемые в каждом конечном интервале $(0, a)$.

Обозначим через $\sigma(x)$ первообразную функцию для $\rho(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$. Если при некотором невещественном λ уравнение имеет два линейно независимых решения из $L_\sigma^{(2)}$, то, по теореме Г. Вейля ([5-7]), это же будет иметь место для любого комплексного λ. Этот случай для уравнения (7) называется „случаем вырождения“.

Чтобы получить самосопряженную краевую задачу для уравнения (7) в случае вырождения, необходимо задаться некоторым граничным условием в точке 0:

$$\cos\alpha\varphi(0) + \sin\alpha\varphi'(0) = 0 \tag{8}$$

* Воспользуемся также случаем и заметим, что для того, чтобы доказательство теоремы 2 в ([1]) сохранило правильность во всех частях, необходимо его вести не в отношении $f(z)$, о которой идет речь в теореме 1, а в отношении функции $f(i+z)$. Доказав теорему 1 для функции $f(i+z)$, мы тем самым докажем ее и для функции $f(z)$.

и некоторым „граничным условием" в точке ∞, которое можно записать так:

$$\lim_{x\to\infty} [\chi(x) y'(x) - \chi'(x) y(x)] = 0; \tag{9}$$

здесь $\chi(x)$ — какое-либо решение уравнения (7) при $\lambda = 0$, не удовлетворяющее условию (8).

Получающаяся при этом краевая проблема оказывается эквивалентной интегральному уравнению (1), в котором $d\sigma = \rho\, dx$, а ядро $K(x, s)$ определяется по формуле (2), где функция $\chi(x)$ та же, что и в граничном условии (9), а $\psi(x)$ есть решение уравнения (7) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее условию (8) и нормированное так, что $\chi(x)\psi'(x) - \chi'(x)\psi(x) \equiv 1$ (см. ([5-7])).

Теорема 4. *Если для уравнения* (7) *имеет место случай вырождения*

$$\int_0^\infty \rho(x)\, dx = \infty, \tag{10}$$

то всякая самосопряженная краевая задача, отвечающая уравнению (7), *имеет бесконечное число отрицательных характеристических чисел* $(0 >) \lambda_{-1} > \lambda_{-2} > \lambda_{-3} \ldots$, *причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{-n}|}} = \infty. \tag{11}$$

В самом деле, если бы вместо (11) имело место (6), то, по теореме 3, можно было бы утверждать, что $n^2 / \lambda_n \to l < \infty$ при $n \to +\infty$, а это, как нетрудно показать, противоречит (10).

Если при достаточно большом $C > 0$, начиная с некоторого места $q(x) < C\rho(x)$, то всякая краевая задача, отвечающая уравнению (7), может иметь только конечное число отрицательных характеристических чисел. Поэтому в этом случае при выполнении условия (10) уравнение (7) не вырождается. Этот признак невырождаемости уравнения (7) (при более частных предположениях относительно функции $\rho(x)$) был установлен Г. Вейлем ([5-7]).

Поступило
12 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **2**, 309 (1947). [2] М. Г. Крейн, Украинск. матем. журн., № 2, 1 (1949). [3] Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Тр. Одесск. ун-та, Математика, **1**, 39 (1935). [4] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Тр. Матем. ин-та АН СССР, **27**, 1 (1949). [5] H. Weyl, Math. Ann., **68**, 220 (1910). [6] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, Oxford, 1946. [7] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950.