Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 VI 1950)

В настоящей заметке мы приводим результаты исследования применимости метода Б. Г. Галеркина, представляющего собой развитие метода Релея — Ритца, к построению приближенных решений нелинейных операторных уравнений.

Многочисленные результаты, относящиеся к методу Релея — Ритца — Галеркина, были получены в основном Н. М. Крыловым для различных типов уравнений (подробную библиографию см. в ([1])). Первые общие результаты о сходимости метода Галеркина для дифференциальных уравнений были получены М. В. Келдышем ([2]), работа которого основана на исследовании бесконечных определителей. В дальнейших работах Л. В. Канторовича ([3]), С. Г. Михлина ([4]) и Н. И. Польского применялись методы функционального анализа. В этих последних работах, как правило, исследование сводилось к изучению линейных вполне непрерывных операторов.

Общее исследование сходимости метода Галеркина для нелинейных уравнений, поскольку нам известно, не производилось.

Основную роль в нашем исследовании играет понятие топологической степени вполне непрерывного векторного поля.

1°. Пусть

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots$$

такая последовательность конечномерных подпространств возрастающей размерности банахова пространства E, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ плотна в E.

Пусть

$$P_1,\ P_2, \ldots$$

последовательность линейных проекционных операторов (не обязательно ортогонального проектирования) с равномерно ограниченными нормами. Пусть при этом

$$P_n E = L_n \qquad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

Пусть A — вполне непрерывный оператор (вообще говоря, нелинейный), действующий в пространстве E. Мы будем рассматривать уравнение

$$\varphi = A\varphi, \tag{1}$$

причем будем предполагать, что это уравнение имеет изолированное решение φ_0 ненулевого индекса (топологическая степень вполне непрерывного векторного поля $A-I$ на сферах малого радиуса с центром в φ_0 отлична от нуля). Если φ_0 — не единственное решение уравнения (1), то все исследование проводится для элементов из некоторого шара $T \subset E$, в котором, кроме φ_0, уравнение (1) не имеет решений.

Уравнения

$$\varphi = P_n A \varphi \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

будем называть приближенными уравнениями, а их решения φ_n — приближенными решениями уравнения (1).

Теорема 1. *Приближенные решения, начиная с некоторого n, существуют.*

При $n \to \infty$ приближенные решения φ_n по норме E сходятся к решению φ_0 уравнения (1).

При оценке быстроты сходимости приближенных решений φ_n естественно сравнить эту быстроту с быстротой сходимости приближенных решений уравнения $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — решение уравнения (1). Иначе говоря, сходимость приближенных решений естественно сравнивать со сходимостью „ряда Фурье":

$$P_1\varphi_0 + (P_2 - P_1)\varphi_0 + (P_3 - P_2)\varphi_0 + \cdots$$

Теорема 2. *Пусть оператор A имеет в точке φ_0, являющейся решением уравнения* (1), *дифференциал Фреше B (главную линейную часть), для которого* 1 *не является собственным числом.*

Тогда быстрота сходимости приближенных решений φ_n к φ_0 характеризуется неравенством

$$\|\varphi_n - \varphi_0\| \leqslant (1 + \varepsilon_n)\, \|P_n\varphi_0 - \varphi_0\|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим еще, что если оператор A непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности точки φ_0 (дифференциал Фреше есть равномерно непрерывная функция точки, в которой дифференциал берется), то, начиная с некоторого n, приближенные уравнения (2) имеют в T единственные решения.

2°. Пусть банахово пространство E обладает базисом $\{g_i\}$. Тогда каждый элемент $\varphi \in E$ однозначно представим сходящимся рядом

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(\varphi)\, g_i.$$

Через L_n будем обозначать линейную оболочку первых n элементов базиса. Через P_n будем обозначать операторы, определенные формулой

$$P_n\varphi = \sum_{i=0}^{n} G_i(\varphi)\, g_i \qquad (\varphi \in E).$$

Легко видеть, что нормы операторов P_n равномерно ограничены.

При таком определении операторов P_n решения φ_n приближенных уравнений будут галеркинскими приближениями.

Таким образом, теоремы 1 и 2 характеризуют сходимость метода Галеркина при приближенном решении нелинейных уравнений.

3°. Пусть в E заданы два базиса $\{g_i\}$ и $\{f_i\}$. Каждый элемент $\varphi \in E$ представим тогда сходящимися рядами

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(\varphi)\, g_i,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(\varphi)\, f_i.$$

Г. И. Петров предложил [5] обобщение метода Галеркина, заключающееся в построении приближенных уравнений

$$Q_n\varphi - Q_n A\varphi = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где Q_n — операторы, определенные формулой

$$Q_n\varphi = \sum_{i=1}^{n} F_i(\varphi)\, f_i,$$

причем решения уравнений (3) отыскиваются в L_n-линейной оболочке первых n элементов базиса $\{g_i\}$.

Обоснование сходимости метода Петрова — Галеркина для одного частного случая было дано самим Г. И. Петровым. В общем случае обоснование сходимости для линейных уравнений было дано Н. И. Польским в предположении, что выполнено условие:

А. *Существует такое число C, что для всех n, начиная с некоторого,*

$$\|\varphi\| \leqslant C\, \|Q\varphi\| \qquad (\varphi \in L_n).$$

Если условие А не выполнено, то можно указать такой элемент φ_0, что приближенные решения Петрова — Галеркина уравнения $\varphi = \varphi_0$ не будут сходиться.

Условие А позволяет привести уравнения (3) к виду (2).

Таким образом, в предположении выполнения условия А, теоремы 1 и 2 характеризуют сходимость метода Петрова — Галеркина при приближенном решении нелинейных уравнений.

4°. Практическое решение получающихся при решении по Галеркину нелинейных уравнений систем алгебраических или даже трансцендентных уравнений, конечно, весьма сложно. Следует, однако, указать случай, когда применение метода Галеркина может сократить вычисления при приближенном решении нелинейных уравнений. Это будет тогда, когда приближенные уравнения можно решать методом последовательных приближений.

5°. Все предыдущие рассуждения о сходимости метода Галеркина относились как к вещественному, так и к комплексному банаховым пространствам.

При исследовании топологическими методами вопроса о быстроте сходимости метода Галеркина при определении собственных чисел и собственных векторов линейных операторов существенно предположение о вещественности банахова пространства.

Пусть E — вещественное гильбертово пространство. Пусть L_n и P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — подпространства и проекционные операторы, введенные в пункте 1°.

Пусть A — линейный вполне непрерывный оператор. Пусть λ_0 — простое (которому отвечает одномерное инвариантное подпространство) собственное число оператора A. Через φ_0 обозначим соответствующий собственный вектор:

$$\varphi_0 = \lambda_0 A \varphi_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 > 0$. Пусть

$$\| \varphi_0 \| = \lambda_0.$$

Нелинейное уравнение

$$\varphi = \| \varphi \| A\varphi$$

имеет изолированное решение φ_0. Дифференциал Фреше B оператора $\| \varphi \| A\varphi$ определитс равенством

$$B\varphi = \frac{(\varphi, \varphi_0)}{\lambda_0^2} \varphi_0 + \lambda_0 A\varphi,$$

так что 1 не является собственным числом оператора B.

Решения φ_n приближенных уравнений

$$\varphi = P_n \| \varphi \| A\varphi$$

будут собственными функциями приближенных операторов $P_n A$, которым отвечают приближенные собственные числа $\lambda_n = \| \varphi_n \|$.

Тогда из теоремы 2 следует:

Теорема 3. *Простое собственное число λ_0 и соответствующая собственная функция φ_0 могут быть вычислены приближенно при помощи метода Галеркина, причем быстрота сходимости приближенных собственных чисел λ_n и приближенных собственных функций φ_n характеризуется неравенствами*

$$| \lambda_n - \lambda_0 | \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| P_n\varphi_0 - \varphi_0 \|,$$

$$\| \varphi_n - \varphi_0 \| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| P_n\varphi_0 - \varphi_0 \|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
23 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов Николай Митрофанович, М., 1945. [2] М. В. Келдыш, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 309 (1942). [3] Л. В. Канторович, ДАН, 60, № 6 (1948); Усп. матем. наук, 3, в. 28 (1948). [4] С. Г. Михлин, ДАН, 61, № 2 (1948). [5] Г. И. Петров, Прикладн. матем. и мех., 4 (3) (1940).