Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 VI 1950)

В этой заметке будет показано, что для уравнений с периодическими коэффициентами теорема о разложении всякой функции с интегрируемым квадратом в интеграл Фурье по собственным функциям доказывается элементарно. Мы получаем таким образом для случая дифференциального уравнения второго порядка новое, очень простое доказательство известной теоремы, для случая же уравнения в частных производных, насколько нам известно, сама теорема доказана впервые.

Для того чтобы сделать рассуждения более выпуклыми, мы проведем их сначала для случая одного независимого переменного. Распространение этих результатов на случай нескольких независимых переменных производится автоматически. Приведенное здесь доказательство тесно связано с доказательством теоремы Планшереля для локально компактных абелевых групп, предложенного А. Вейлем [1].

1. Все последующие рассуждения основаны на следующей простой лемме.

Лемма. *Всякую непрерывную функцию $f(x)$, равную нулю вне некоторого конечного интервала, можно представить в виде*

$$f(x)=\int_0^{2\pi} f_t(x)\,dt, \tag{1}$$

где функции $f_t(x)$ удовлетворяют условию

$$f_t(x+1)=e^{it}f_t(x). \tag{2}$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |f_t(x)|^2\,dx\,dt. \tag{3}$$

Указанное соответствие можно продолжить на все функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, равная нулю вне некоторого конечного интервала. Положим

$$f_t(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)\,e^{-int}. \tag{4}$$

В этом ряде лишь конечное число членов отлично от нуля, и поэтому $f_t(x)$ есть непрерывная функция от x и t. Очевидно, что функция $f_t(x)$ удовлетворяет условию (2). Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_t(x)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_n f(x+n)\,e^{-int}\,dt = f(x).$$

Нам осталось доказать равенство (3). Так как при фиксированном x $f_t(x) = \sum_n f(x+n)\,e^{-int}$ есть тригонометрический полином относительно t, то имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f_t(x)|^2\,dt\,dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(x+n)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx.$$

Пусть теперь $f_t(x)$ — непрерывная функция переменных x и t, $f_t(x+1) = e^{it} f_t(x)$ и $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_t(x)\,dt$; тогда

$$f(x+n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_t(x+n)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_t(x)\,e^{int}\,dt$$

и, следовательно, $f(x+n)$ суть коэффициенты Фурье функции $f_t(x)$, рассматриваемой как функция от t при фиксированном x. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left[\int_0^{2\pi} |f_t(x)|^2\,dt\right]dx = \int_0^1 \sum |f(x+n)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx.$$

2. Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор n-го порядка, коэффициенты которого являются периодическими функциями от x с периодом, равным единице. Докажем, что всякую функцию с интегрируемым квадратом можно разложить в интеграл Фурье по ограниченным собственным функциям этого уравнения. Рассмотрим наш оператор, который мы обозначим $L[y]$, лишь на интервале $(0,\ 1)$ и зададим граничные условия следующим образом:

$$y^{(k)}(1) = e^{-it}\,y^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Оператор $L[y]$, определенный на функциях, заданных на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющих граничным условиям (5), является самосопряженным дифференциальным оператором, как это нетрудно проверить, например, непосредственным интегрированием по частям. Он обладает дискретным спектром, как оператор, заданный на конечном интервале. Нормированные собственные функции оператора $L[y]$ на интервале $(0,1)$ при граничных условиях (5) обозначим через $y_{n,\,t}(x)$, а соответствующие им собственные значения — через $\lambda_n(t)$. Если рассматривать эти собственные функции на всей прямой, то они удовлетворяют функциональному уравнению

$$y_{n,\,t}(x+1) = e^{-it}\,y_{n,\,t}(x). \tag{6}$$

Действительно, в силу граничных условий (5), $y_{n,\,t}(x)\,e^{-it}$ и $y_{n,\,t}(x+1)$ совпадают при $x = 0$ вместе с производными до $n-1$-го порядка и, следовательно, вообще совпадают.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом, определенная на интервале $-\infty, +\infty$. Тогда, в силу леммы, для почти всех t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, определена функция $f_t(x)$, о которой речь в п. 1, и $f_t(x)$ для почти всех t является функцией с интегрируемым квадратом по x. Положим

$$a_n(t) = \int_0^1 f_t(x)\, y_{n,t}(x)\, dx.$$

$a_n(t)$ являются коэффициентами Фурье разложения функции $f_t(x)$ на интервале $(0, 1)$ по функциям $y_{n,t}(x)$. Предположим пока, что $f(x)$ непрерывная функция, равная нулю вне конечного интервала. Покажем, что $a_n(t)$ *являются также значениями преобразования Фурье функции* $f(x)$ *для бесконечного интервала.*

Действительно,

$$a_n(t) = \int_0^1 f_t(x)\, y_{n,t}(x)\, dx = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)\, e^{-ikt}\, y_{n,t}(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)\, y_{n,t}(x+k)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y_{n,t}(x)\, dx. \tag{7}$$

Докажем теперь равенство Парсеваля на интервале $-\infty, +\infty$. Так как $a_n(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f_t(x)$, то мы имеем

$$\int_0^1 |f_t(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n(t)|^2.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_t(x)|^2\, dx\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_n |a_n(t)|^2\, dt, \tag{8}$$

что и требовалось доказать.

Обратно, пусть задана функция $a_n(t)$ от n и t такая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_n |a_n(t)|^2\, dt < +\infty.$$

Докажем, что ей отвечает некоторая функция $f(x)$ с интегрируемым квадратом. Действительно, ряд $\Sigma |a_n(t)|^2$ сходится для почти всех t. Для таких t ряд $\sum\limits_n a_n(t)\, y_{n,t}(x)$ сходится в среднем по x. Обозначим его сумму через $f_t(x)$. Функция $f_t(x)$ есть функция с интегрируемым квадратом, причем $\int\limits_0^1 |f_t(x)|^2\, dx = \sum\limits_n |a_n(t)|^2$.

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_n |a_n(t)|^2\, dt < +\infty, \tag{8'}$$

то, согласно лемме, существует также $f(x)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_n |a_n(t)|^2 dt.$$

Указанное ранее соответствие между функциями $f(x)$, равными нулю вне конечного интервала, можно, конечно, в силу наличия равенства (8), распространить на все функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом; при этом устанавливается изометрическое отображение пространства всех функций $f(x)$ с интегрируемым квадратом на совокупность всех функций $a_n(t)$, для которых (8′) конечно.

3. Рассмотрим теперь случай уравнений в частных производных. Будем сейчас для определенности под $L[u]$ понимать эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого являются непрерывными, периодическими функциями от $x_1, \ldots, x_k$ с периодом, равным единице по каждому переменному. Обозначим через $u_{n, t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k)$ собственные функции оператора $L(u)$, определенного на функциях в кубе $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$e^{-i(x_1 t_1 + \ldots + x_k t_k)} \quad u(x_1, \ldots, x_k) \tag{9}$$

периодическая функция. Легко проверить, что оператор при этих граничных условиях является самосопряженным. Мы можем дословно повторить все рассуждения п. 2 и получим тогда равенство Парсеваля относительно собственных функций нашего дифференциального оператора, определенного на функциях, заданных во всем пространстве. Ясно также, что для нас несущественно, что $L[u]$ есть дифференциальный оператор второго порядка. Важно лишь, чтобы при граничных условиях (9) спектр оператора был дискретным. Дискретность спектра оператора $L[u]$, заданного на совокупности функций, определенных на множестве $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ и удовлетворяющих граничным условиям (9), для случая эллиптического оператора второго порядка, получается построением функции Грина этого дифференциального оператора. Ее можно построить, например, так, как она строится для случая сферы методом „параметрикс" у Гильберта.

Повторяя дословно рассуждения, проведенные в п. 2, мы получим

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \sum_n \cdots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |a_n(t_1, \ldots, t_k)|^2 dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \ldots, x_k)|^2 dx_1 \ldots dx_k. \tag{8″}$$

При этом $a_n(t_1, \ldots, t_k)$ есть преобразование Фурье функции f, т. е

$$a_n(t_1, \ldots, t_k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_k)\, u_{n, t_1, \ldots, t_k}(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k.$$

Поступило
13 VI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.