Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXIII, № 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. СВЕШНИКОВ

ПРИНЦИП ИЗЛУЧЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 VI 1950)

Многие задачи математической физики сводятся к решению волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -F(M) \qquad [M = (x, y, z)] \tag{1}$$

в неограниченной области.

Однако решение этого уравнения одним требованием определенного порядка роста на бесконечности определяется неоднозначно. Поэтому для выделения единственного решения, соответствующего расходящимся волнам, искомое решение следует подчинить некоторым дополнительным условиям (принципу излучения).

В. С. Игнатовским [1] было указано, что искомое решение можно искать как предел решения волнового уравнения с комплексным $k_1^2 = k^2 + i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ при $\varepsilon \to 0$; это в случае задач электродинамики соответствует стремлению к нулю проводимости внешней среды. Однако существование этого предела им было установлено лишь для конкретной задачи дифракции электромагнитных волн на бесконечно длинной проволоке.

Зоммерфельд [2] показал, что если решение волнового уравнения подчинить на бесконечности дополнительному условию

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv\right) = 0, \tag{2}$$

то можно обеспечить однозначность решения. Получающееся при этом решение представляет собой расходящуюся бегущую волну. Это условие вошло в литературу под названием „принципа излучения Зоммерфельда". Однако соотношение (2) нельзя рассматривать как единообразный принцип, так как оно видоизменяется в зависимости от области решения волнового уравнения.

Способ выделения единственного решения, предложенный Игнатовским, свободен от этого недостатка и может рассматриваться как единообразный принцип излучения. В дальнейшем изложении мы будем называть его „принципом предельного поглощения".

В несколько иной форме подход к единообразному выделению расходящейся волны был предложен А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [3]. Согласно их принципу, искомое решение волнового уравнения должно быть предельным значением при $t \to \infty$ амплитуды решения уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(M)\, e^{-i\omega_0 t} \qquad \left(k^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\right)$$

с нулевыми начальными условиями:

$$u\ (M, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\ (M, 0) = 0.$$

Этот принцип естественно назвать „принципом предельной амплитуды".

В настоящей работе показано, что в применении к решению волнового уравнения в области между двумя параллельными плоскостями с нулевыми граничными условиями принцип излучения в форме предельной амплитуды или предельного поглощения выделяет единственное решение, соответствующее физическому требованию представимости в виде расходящихся волн. При этом полученное решение удовлетворяет на бесконечности некоторым аналитическим условиям, по виду аналогичным условиям Зоммерфельда. Удовлетворение этим условиям является достаточным для обеспечения единственности решения. В § 3 обоснована применимость принципа предельного поглощения к дифракционным задачам.

§ 1. Рассмотрим решение уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -F(M)\, e^{-i\omega_0 t} \tag{3}$$

в области между двумя параллельными плоскостями $z=0$ и $z=l$, удовлетворяющее условиям

$$u\,|_{z=0} = 0, \quad u\,|_{z=l} = 0, \quad u\,(M, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\,(M, 0) = 0,$$

причем $F(M)$ — локальная функция, т. е. функция, отличная от нуля лишь в ограниченной части пространства.

Это решение имеет вид:

$$u\,(M, t) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \iiint\limits_{r\leqslant ct} \frac{e^{ikr_{M\overline{M}}} F_n(\overline{M})\, e^{-i\omega_0 t}}{r_{M\overline{M}}}\, d\tau_{\overline{M}}, \tag{4}$$

где $F_n(\overline{M})$ — последовательные отражения функции $F(\overline{M})$ от плоскостей $z=0$ и $z=l$.

Нами доказано, что при $t\to\infty$ существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} e^{i\omega_0}\, u(M, t) = \overline{v}\,(M)$, где

$$\overline{v}\,(M) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \iiint \frac{e^{ikr_{M\overline{M}}} F_n(\overline{M})}{r_{M\overline{M}}}\, d\tau_{\overline{M}}, \tag{5}$$

причем функция $\overline{v}\,(M)$ удовлетворяет волновому уравнению.

Доказательство этого положения основано на изучении ряда

$$G(z_0, \rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+[z-(2ln+z_0)]^2}}}{\sqrt{\rho^2+[z-(2ln+z_0)]^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+[z-(2ln-z_0)]^2}}}{\sqrt{\rho^2+[z-(2ln-z_0)]^2}}\right\}. \tag{6}$$

Можно доказать, что этот ряд сходится равномерно по z и по ρ при $0\leqslant z\leqslant l$ и $\rho\leqslant R$.

Этим мы показали, что принцип предельной амплитуды одинаково применим как для неограниченного пространства, так и для слоя между двумя параллельными плоскостями.

§ 2. Принцип предельной амплитуды позволяет найти аналитические условия на бесконечности, которым должно быть подчинено решение волнового уравнения для выделения единственного решения, представимого в виде расходящихся волн.

Пользуясь представлением функции источника волнового уравнения в виде ряда (6) и ее разложением Фурье

$$G(z_0, \rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(\rho, z_0) \sin\frac{m\pi}{l} z, \tag{7}$$

где

$$C_m(\rho, z_0) = -\frac{i \sin\frac{m\pi}{l} z_0}{2l} H_0^{(1)}\left(k\rho \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{lk}\right)^2 m^2}\right), \tag{8}$$

легко доказать следующую теорему.

Теорема. *Однородное волновое уравнение*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \tag{9}$$

в слое между двумя параллельными плоскостями $z = 0$ *и* $z = l$ *имеет только тривиальное решение* $v \equiv 0$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$v\big|_{z=0} = 0, \quad v\big|_{z=l} = 0$$

и условиям на бесконечности

$$\sqrt{\rho}\, v_m \quad \textit{конечно при} \quad \rho \to \infty,$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial v_m}{\partial \rho} - ik_m v_m\right) = 0, \tag{10}$$

где v_m — *коэффициенты разложения функции* $v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin\frac{m\pi}{l} z$, *а* k_m *имеют вид* $k_m = k\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{lk}\right)^2 m^2}$. *Число условий* $M = \frac{lk}{\pi}$.

Парциальные условия излучения (10) выделяют единственное решение волнового уравнения, представимое расходящимися волнами. Это решение совпадает с решением, выделяемым принципом предельной амплитуды. Легко показать, что и принцип предельного поглощения выделяет единственное решение волнового уравнения в области между параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = l$, удовлетворяющее на бесконечности парциальным условиям излучения.

§ 3. Перейдем теперь к дифракционным задачам. Пусть в неограниченном пространстве помещено некоторое ограниченное тело K с границей S. Требуется найти единственное решение уравнений

$$\Delta u + k^2 u = -f(M), \tag{11}$$

где $k^2 = \frac{\mu_{вн}\varepsilon_{вн}\omega^2 + i\mu_{вн}\sigma_{вн}\omega}{c^2}$ внутри K; $k^2 = \frac{\mu_н\varepsilon_н\omega^2 + i\mu_н\sigma_н\omega}{c^2}$ вне K,

ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее краевым условиям

$$u_{вн}\big|_S = u_н\big|_S, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{вн}\bigg|_S = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_н\bigg|_S.$$

Оказывается, что если во внешней среде $\sigma_н = 0$, то одного требования ограниченности решения на бесконечности недостаточно для обеспечения единственности решения дифракционной задачи. Рядом авторов ([4–7]) было показано, что можно обеспечить единственность задачи, подчинив решение дополнительному условию на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0.$$

Нами показано, что если $\sigma_н \neq 0$, то одно требование ограниченности решения на бесконечности достаточно для обеспечения единственности. При этом как само решение, так и его производная по радиусу экспоненциально убывают на бесконечности.

Воспользовавшись интегральными представлениями решений при $\sigma_н \neq 0$ и $\sigma_н = 0$, которые имеют вид:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{e^{ik_н r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} f(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}(k_{вн}^2 - k_н^2)\iiint\limits_K \frac{e^{ik_н r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} u(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}}, \qquad (12)$$

$$u_0(M) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{e^{ik_н^0 r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} f(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}(k_{вн}^2 - k_н^{02})\iiint\limits_K \frac{e^{ik_н^0 r_{M\overline{M}}}}{r_{M\overline{M}}} u_0(\overline{M})\, d\tau_{\overline{M}}, \qquad (13)$$

можно показать, что решение уравнения (12) вляется непрерывной функцией параметра $\sigma_н$ и при $\sigma_н \to 0$ стремится к решению уравнения (13).

Таким образом, принцип предельного поглощения оказывается применимым и для выделения единственного решения дифракционной задачи. Аналогичные рассмотрения проведены и для уравнений Максвелла, описывающих дифракцию электромагнитных волн. Полученные результаты позволяют рассматривать принцип предельного поглощения как общий принцип излучения.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. А. Н. Тихонову, по предложению и под руководством которого выполнена эта работа, а также А. А. Самарскому за ценные указания.

Поступило
9 V 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, Ann. d. Phys., **18** (1905). [2] A. Sommerfeld Jahresber. d. deutsch. math. Ver., **21**, 309 (1912). [3] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, ЖЭТФ, **18**, 2, 243 (1948). [4] В. Д. Купрадзе, Основные задачи математической теории дифракции, 1935; ДАН, **1**, 1 (1936); ДАН, **16**, 1 (1937); Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **2** (1937); Compositio Mathematica, 6, F. 2 (1938). [5] Д. Авазашвили, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **8** (1940). [6] H. Freudenthal, Compositio Matematica, 6, F. 2 (1938). [7] Я. Н. Фельд, ЖЭТФ, **8**, 6 (1938).